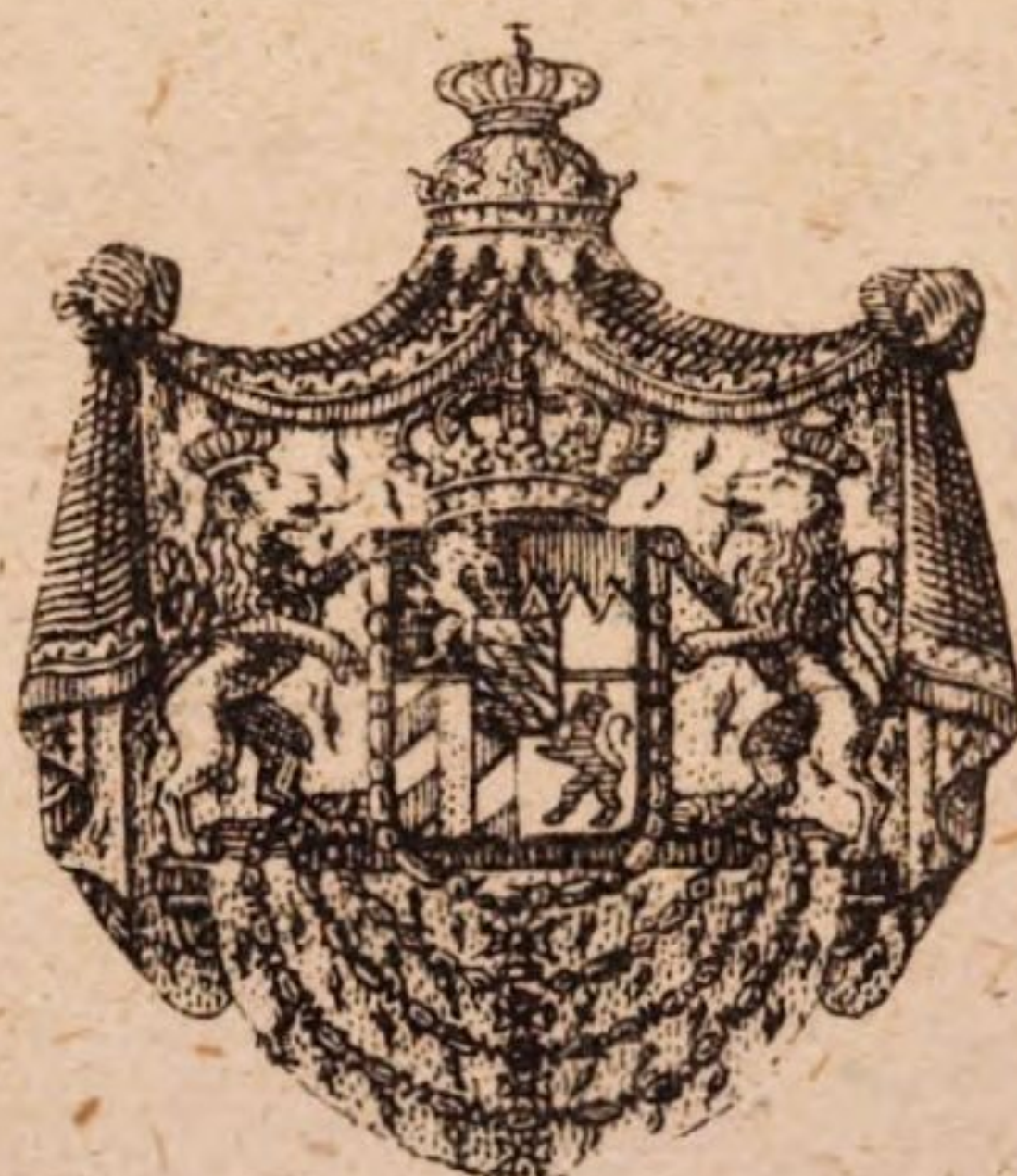


Enc.
154 h

Mayer



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayer. Staats-
Bibliothek
München

Untersuchungen
über die
wissenschaftliche Methode

mit

besonderer Anwendung auf die Mathematik,

von

Dr. Aloys Mayr,

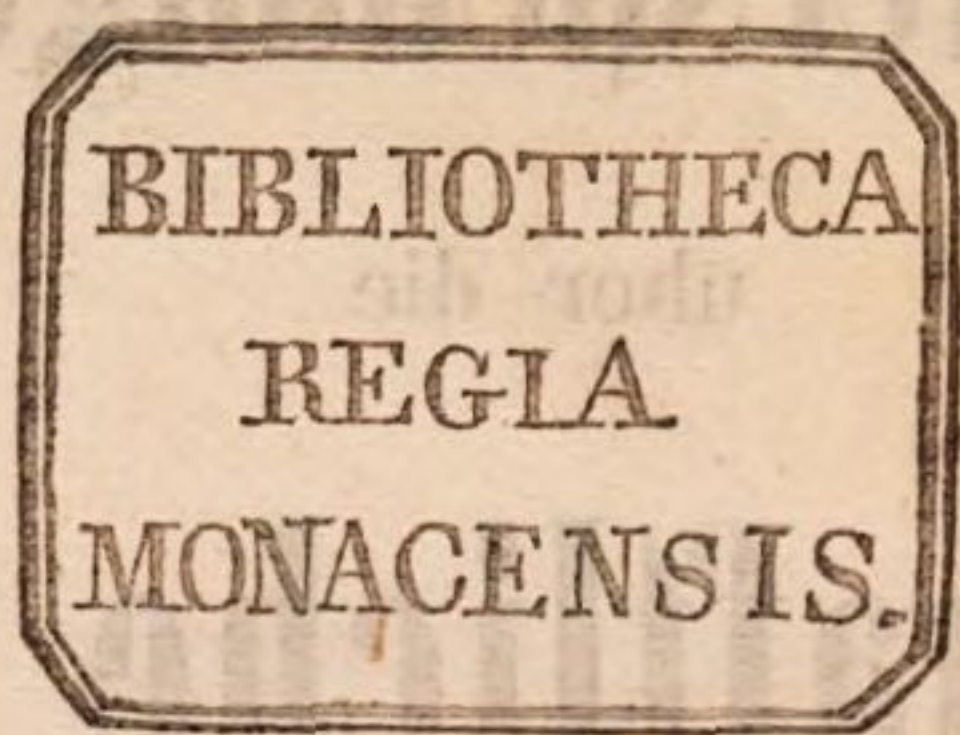
öffentlichem ordentlichem Professor der Mathematik und Astronomie
an der Julius-Maximilians-Universität zu Würzburg.

*Ipse certe, ut ingenue fatear, prolegomena haec magis
pro partu temporis, quam ingenii, aestimare soleo.*

Würzburg.

Stahel'sche Buchhandlung.

1845.



Dr. Aloys Mayr.

öffentlicher ordentlicher Professor der Mathematik und Astronomie
an der Julius-Maximilians-Universität zu Würzburg.

Das Buch ist Eigentum der Universität zu Würzburg.
Es darf nicht aus der Bibliothek entnommen werden.

Würzburg.

Stadel'sche Buchhandlung.

1845.

V o r r e d e.

In den nachfolgenden Untersuchungen habe ich die wesentlichsten Fragen über die wissenschaftliche Methode erörtert, die Fragen über die Hilfsmittel des Denkens, über die Definitionen und Zeichensprachen, über die Axiome und Beweise, über die Auffindung der Lehrsätze und über die Elementarisirung und Ordnung aller Wissenschaften.

Mehrere dieser Fragen habe ich von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet, wie die Lehren über die Zeichen und Axiome; für andere, wie für die Lehren über die Analogie und Induction, habe ich bestimmte und unabänderliche Gesetze festzustellen gesucht. Diese Gesetze sind zwar nur wenige, aber wenn sie überall richtig angewendet werden, so werden sie hinreichen können. Ich war bemüht, die Beweise, sowohl die directen als die indirecten, ihrem innersten Wesen nach auseinander zu setzen, und gleichsam zu zergliedern, und den ganzen Vorgang, wie er in allem Denken stattfindet, und immerdar stattfinden wird, zu enthüllen und aufzudecken. Vor allem wünsche ich aber, dass die Untersuchungen über die bestimmten,

der Mathematik coordinirten, Vernunft-Wissenschaften beachtet, und einer ernsten Prüfung unterworfen werden mögen. — Es wird sich leicht die Ueberzeugung bilden können, dass von der Lösung dieser Fragen die weiteren Fortschritte aller Wissenschaften abhängen werden. Wie aber auch immer ihre endliche Lösung ausfallen möge, so wird doch jedenfalls so viel gewonnen sein, dass sie fortan von keiner Wissenschaft, die diesen Namen verdienen will, umgangen werden können. — Die Aufgaben sind auf ihre bestimmten und allgemeinen Ausdrücke gebracht, der Weg der Forschung ist eröffnet; und da jeder Weg, der zur Forschung und nicht zum Stillstande führt, ein guter Weg ist, so werden diese Untersuchungen wenigstens so viel bewirken können, dass sie zum weitem Voranschreiten auf dem einmal angebahnten Wege auffordern werden. Es gilt nicht, ein Schul-System zu begründen, oder zu verbreiten, sondern vielmehr die substantziellen und wirklichen Wahrheiten zu enthüllen und zu beweisen.

Ich habe die Lehren über die Methode mit beständiger Rücksicht auf die Mathematik untersucht und vorgetragen. Mehrere Gründe sind es, die mich zu dieser Anwendung der Methode auf eine besondere Wissenschaft bestimmt haben. Zuerst lag mir die Mathematik am nächsten. Ich musste bemüht sein, die Punkte, die zum Gelingen eines vollkommen geordneten Systems nothwendig und unentbehrlich sind, in dem Systeme der Mathematik nachzuweisen und dar-

zustellen. Und dass die Bedingungen, die allein ein wissenschaftliches System möglich machen, nicht wenig und nicht unbedeutend seien, werden Alle einsehen, welche die Untersuchungen über die Elementarisirung der Wissenschaften eines ernsten Nachdenkens würdigen, und den Versuch machen wollen, die hervorgehobenen Schwierigkeiten auf diesem oder auf einem anderen Wege aufzulösen und zu überwinden.

Es war sehr natürlich, die gefundenen Resultate in der sichersten und am weitesten vorgeschrittenen Wissenschaft, wie die Mathematik nach allgemeiner Uebereinstimmung ist, anzuwenden und zu erproben, einmal weil in ihr die meisten Aussichten auf einen günstigen Erfolg gegeben sind, und dann, weil es besser ist, sogleich zu bestimmten Untersuchungen überzugehen, und die strengen Forderungen der Methode an sich selber zu stellen, anstatt die Untersuchungen im Allgemeinen zu halten, und Forderungen an Andere zu machen, die man nicht vorher an sich selber gemacht hat.

Endlich kann es für eine allgemeine Methodenlehre nur erwünscht sein, wenn sie die Probe einer wirklichen Wissenschaft aushalten kann; und es ist unstreitig besser, wenn sie von einer strengen und sichern, als wenn sie von einer schwankenden und unsichern Wissenschaft geprüft wird. Eine Methodenlehre, welche die Prüfung einer Wissenschaft nicht aushält, ist ganz gewiss falsch; besteht sie aber diese Prüfung, so muss sie wenigstens für die prüfende Wissenschaft gültig

und wahr sein, und es ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass sie auch für alle andern Wissenschaften gültig und wahr sein werde.

Ich bin übrigens bemüht gewesen, die Gesetze in solcher Allgemeinheit zu entwickeln, dass sie nicht für die Mathematik allein, sondern für alle Wissenschaften gelten mögen; und ich gestehe offen, dass ich keine andere Methode, die mit der vorgetragenen nicht übereinstimmt, für eine wahrhaft wissenschaftliche Methode halten könne. Ich bin sehr weit von dem Bestreben entfernt, die eigenthümlich mathematische Methode auf alle übrigen nicht-mathematischen Wissenschaften auszudehnen; ich glaube vielmehr, dass noch nirgends anderswo mit grösserer Schärfe und Bestimmtheit, als in diesen Untersuchungen geschehen ist, das Allgemeine der Methode von dem eigenthümlich Mathematischen unterschieden und getrennt worden sei. Ich schliesse daher mit dem Wunsche, dass die gefundenen Resultate für alle Wissenschaften, sowohl für die Vernunft-Wissenschaften, als für die Erfahrungs-Wissenschaften erfolgreich und von dauerndem Nutzen sein mögen.

Würzburg am Neujahre 1845.

Der Verfasser.

Inhalts - Verzeichniss.

I. Untersuchung.

Ueber den Werth der Methode pag. 1

II. Untersuchung.

Ueber die mathematische Methode pag. 15

III. Untersuchung.

Ueber Sprachliches und Metaphysisches pag. 31

IV. Untersuchung.

Ueber die Sprache pag. 58

V. Untersuchung.

Ueber die Definitionen pag. 74

VI. Untersuchung.

Ueber die Zeichensprache pag. 96

VII. Untersuchung.

Fortsetzung der vorhergehenden Untersuchung pag. 116

VIII. Untersuchung.

Ueber die Axiome pag. 139

VIII

IX. Untersuchung.

Fortsetzung der vorhergehenden Untersuchung . . . pag. 162

X. Untersuchung.

Ueber die Beweise der Lehrsätze . . . pag. 183

XI. Untersuchung.

Ueber die Auffindung der Lehrsätze . . . pag. 208

XII. Untersuchung.

Ueber die Elementarisirung der Wissenschaften . . . pag. 235

XIII. Untersuchung.

Ueber die Ordnung der Wissenschaften . . . pag. 264

XIV. Untersuchung.

Schluss der vorhergehenden Untersuchung . . . pag. 283

Erste Untersuchung.

Ueber den Werth der Methode.

Die Methode ist das Vorzüglichste in jeder Wissenschaft. Wer sie erlangt hat, der hat die Wissenschaft selbst errungen, er hat sie als eine freie, leichte, unverlierbare Erkenntniss.

Wenn die Wissenschaft der blossen Wahrnehmung gegenüber ein Besitz ist, der sich von Geschlecht zu Geschlecht vererben lässt, da sie Wesentliches und Unwesentliches, Lehrbares und Zufälliges unterscheidet, und dasjenige hervorhebt, was ein Gemeingut Aller werden kann, während die blossen Wahrnehmungen das Wahre und Falsche nicht unterscheiden, und nicht selten das Eine für das Andere nehmen, und statt des Allgemeinen und Wesentlichen das Zufällige und Willkührliche geltend machen, (was aber nicht gelehrt und überliefert werden kann); so ist die Methode der blossen Wissenschaft gegenüber die wahre Wissenschaft der Wissenschaft selbst, da sie die wesentlichen Elemente, die zum Gelingen jeder Wissenschaft beigetragen haben und fortwährend beitragen, als solche unterscheidet und kennen lehrt, erhält und ausübt.

Ohne Methode ist es allerdings möglich, dass man die Wissenschaft als einen bloss zufälligen Besitz habe; man kann sie haben, als ob man sie nicht hätte, und da tritt dann die Aufgabe ein, dass man jede Erkenntniss zu einem bleibenden Besitzthume erhebe, dass man die Sätze einer Wissenschaft nicht bloss als Sätze habe

und beweise, sondern dass man sie ganz habe, dass man einsehe, warum gerade diese Sätze und keine andern die Wissenschaft bilden, warum sie in dieser Ordnung und in keiner andern verbunden, und warum sie in diesen Beweisen und in keinen andern bewiesen werden können. Nur wer die Wissenschaft in diesem Sinne hat, der hat sie auf die rechte Art; er weiss nicht bloss die Wissenschaft, sondern er weiss auch, warum er sie so, und nicht anders wisse, er hat ihre ganze Ordnung, Schönheit, Klarheit und Festigkeit in seiner Macht.

Diess lässt sich sogleich in Beispielen zeigen und erläutern. — Zu der Methode gehören vornehmlich die Beweise. Vergleicht man die Beweise einer Wissenschaft, so findet man, dass einige Sätze direct, andere indirect bewiesen werden. So ist es in der Mathematik, und so wird es auch in allen Wissenschaften sein. Wird diess zufällig sein können? Wird es gleichgültig sein, ob irgend ein bestimmter Satz direct oder indirect bewiesen werde? — Das Allgemeine der Beweise besteht darin, dass die zu beweisenden Sätze mit früheren schon bewiesenen oder sonst gewissen Sätzen in nothwendigen Zusammenhang gebracht werden; das Wesen der directen Beweise besteht darin, dass die nachfolgenden Sätze aus den früheren Sätzen, in denen sie schon enthalten sind, abgeleitet werden; das Wesen der indirecten Beweise aber besteht darin, dass die nachfolgenden Sätze mit den früheren Sätzen in einen solchen Zusammenhang gebracht werden, dass die früheren Sätze nicht wahr sein könnten, wenn die späteren nicht wahr wären. Sie sind zwar nicht in den früheren Sätzen unmittelbar enthalten, aber sie werden doch mit ihnen in einen nothwendigen Zusammenhang gebracht. — Diess findet man auf der Stelle, wenn man seine Aufmerksamkeit auf die Methode richtet. Wenn man z. B. in der Mathematik die Beweise zusammenstellt, die direct geführt werden, so findet man, dass die folgenden Sätze nur Umformungen von früheren Sätzen seien, und dass sie aus diesen gefunden werden, wenn Gleiches statt Gleichem substituirt

wird, so dass die früheren Sätze schon die nachfolgenden Sätze sind, nur in anderer Gestalt. Wird aus dem Satze: $8x + 20 = 36$ der neue Satz: $x = 2$ bewiesen, so wird der gegebene Satz: $8x + 20 = 36$ durch Addition und Division umgeformt, bis der neue Satz: $x = 2$ hervorgeht. — Vergleicht man aber die indirecten Beweise der Mathematik, so findet man, dass die Gleichheit zweier Grössen dadurch bewiesen wird, dass man zeigt, dass die eine Grösse nicht grösser und nicht kleiner sein könne, als die andere, so lange die früheren Sätze wahr sind; woraus man schliesst, dass beide Grössen gleich sein müssen.

Wenn daher irgend eine Wissenschaft einen ersten Satz hätte von solcher Allgemeinheit, dass er alle nachfolgenden Sätze dieser Wissenschaft enthielte, so würde es nicht gleichgültig sein, wie in dieser Wissenschaft bewiesen würde; es müsste Alles direct bewiesen werden, weil Alles direct bewiesen, Alles abgeleitet werden könnte, da ja Alles in Allem enthalten wäre.

Wenn aber eine Wissenschaft mehrere Sätze hätte, die nicht von einander abgeleitet, die also nur indirect bewiesen werden könnten, so würde man aussprechen müssen, dass diese Wissenschaft keinen Satz von solcher Allgemeinheit habe, der alle übrigen Sätze enthielte, dass in ihr vielmehr Sätze zu Sätzen synthetisch hinzukommen, aber doch als zu einer und derselben Wissenschaft gehörig bewiesen werden. Denn diess ist das Criterium der Einheit einer Wissenschaft, dass alle ihre Sätze, wenn auch nicht gerade von einander abgeleitet, doch mit einander in einen nothwendigen Zusammenhang gebracht werden können. Sätze aber, von denen man einsieht, dass sie nicht in nothwendigen Zusammenhang gebracht werden können, sind entweder wahre und falsche Sätze gegen einander, oder sie gehören wenigstens nicht zu einer und derselben Wissenschaft.

Finden sich daher in einer wirklichen Wissenschaft Sätze, die theils direct, theils indirect bewiesen werden, so wird man

aussprechen müssen, dass in dieser Wissenschaft mehrere Sätze seien, die nicht von einander abgeleitet, aber doch mit einander in nothwendigen Zusammenhang gebracht werden können, und dass es wieder andere Sätze dieser Wissenschaft gebe, die aus andern durch blosse Umformung und Ableitung gefunden und bewiesen werden können. Die Sätze der ersten Art werden vielleicht die anfänglichen Sätze neuer Abschnitte des Systems sein, sie werden aber auch ihrerseits viele andere Sätze enthalten, die blos Umformungen ihrer selbst sind und direct bewiesen werden können. Aber die anfänglichen Sätze selbst werden nur indirect bewiesen werden können. Es wird nimmermehr gleichgültig sein, wie sie bewiesen werden, ob so oder anders, sondern man wird es jedem Satze ansehen müssen, ob er direct oder indirect bewiesen werden könne. Man wird auch gegen die Beweise nicht gleichgültig sein, man wird sie nicht blos lernen und verstehen, sondern sie wahrhaft begreifen, warum sie gerade Beweise in dieser Form und in keiner andern Form seien. Auch wird man es nicht als einen Mangel einer Wissenschaft ausgeben, wenn sie viele indirecte Beweise habe, man wird nur aussprechen können, dass sie viele synthetische Sätze habe, was viel mehr ein Vorzug als ein Mangel einer Wissenschaft ist. Ohne Methode wird es möglich sein, dass man leichtfertig urtheile, dass man Sätze beweisen könne und doch nicht einsehe, warum sie gerade so und nicht anders bewiesen werden müssen, dass man aus den Beweisen nichts lerne; während mit der Methode Alles beachtet und der innere Grund und der ganze Bau der Wissenschaft durchforscht wird.

Den Beweisen wird aber die Erfindung und Aufstellung der Lehrsätze vorausgehen müssen. Es ist nicht genug, dass man die Sätze beweisen könne, man muss sie auch finden können. Wer nun die Wissenschaft auf die rechte Art, wer ihre Methode hat, der wird sich die Sätze nicht geben lassen, er wird sie suchen, und die Methode muss ihm die Mittel an die Hand ge-

ben, wie er sie finden könne. Er sieht auf der Stelle ein, dass die Sätze nicht anders bewiesen werden können, als wie sie gefunden werden, und dass sie nicht anders gefunden werden, als wie sie bewiesen werden können; denn der Beweis ist der Nachweis des richtigen und wissenschaftlichen Findens. Er wird also diejenigen Sätze, die direct bewiesen werden, offenbar durch Ableitung aus andern Sätzen suchen, und er wird diejenigen Sätze, die nicht direct bewiesen werden können, nimmermehr durch Ableitung suchen wollen; denn könnten sie abgeleitet werden, so könnten sie auch direct bewiesen werden; er wird sich nicht vergeblich abmühen und dann die Schuld des Misslingens auf die Wissenschaft selbst schieben, er wird einen andern Weg, die Lehrsätze zu finden, einschlagen, als den directen Weg durch Ableitung und Umformung, da er einsieht, dass er auf diesem Wege nichts finden könne, und er wird den andern Weg keineswegs für zufällig, oder für minder wichtig halten, sondern er wird ihn eben so hoch schätzen, wie den directen Weg der Ableitung der Lehrsätze.

Ferner ist es eine wesentliche Aufgabe der Methode, dass sie die Ueberzeugung gebe, dass man alle Sätze einer Wissenschaft in ihrer Vollständigkeit und rechten Aufeinanderfolge finden könne. Wie könnte man bei der Unsicherheit, ob nicht hie und da Lücken geblieben seien, die man nicht bemerkt habe, eine Wissenschaft vollenden wollen? Könnte es denn nicht der Fall sein, dass später zufällige Sätze entdeckt würden, die gerade durch solche Sätze, die in jenen Lücken unbekannt geblieben waren, bewiesen werden müssten, und die nun nicht zu beweisen wären, weil die früheren Sätze fehlten, die ihnen zum Beweise dienen sollten? Und da alle Sätze, die mit andern Sätzen einer Wissenschaft nicht im nothwendigen Zusammenhange stehen, aus dieser Wissenschaft entfernt werden müssen, mit welchem Rechte würde man sie ausschliessen können, wenn man nicht die Ueberzeugung hätte, dass man keinen der vorhergehenden und nothwendigen Sätze übergangen habe?

Diese Ueberzeugung kann aber nur durch die sorgfältigste Aufmerksamkeit auf die Methode selbst gewonnen werden. Zum Beispiel: Man habe in der Analysis gefunden, dass ihre ersten Operationen in Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzirung, Radizirung, Logarithmirung u. s. w. bestehen, und dass sie in dieser Ordnung, wie sie sind, auf einander folgen. Welche Probleme werden nun z. B. bei den Logarithmen möglich sein? Ohne Methode wird man einige Probleme aufstellen, vielleicht gerade die wesentlichsten Probleme, aber wird man auch die Ueberzeugung haben können, dass man sie alle entwickelt, dass man keines übergangen habe? Die Methode jedoch giebt die Sicherheit aller Probleme. Sie sagt: Es muss jede Operation mit jeder vorhergehenden und mit sich selber verbunden werden, dann wird man sicher sein, dass man keinen nothwendigen Lehrsatz übergangen habe. Sie stellt daher zwei Reihen von Fragen auf. Erste Reihe: Wie werden addirte Grössen logarithmirt, wie werden subtrahirte, multiplicirte, dividirte, potenzirte, radizirte und logarithmirte Grössen logarithmirt? Zweite Reihe: Wie werden logarithmirte Grössen addirt, wie werden sie subtrahirt, multiplicirt, dividirt, potenzirt, radizirt und logarithmirt? — Ohne Methode wird man vielleicht einige dieser Aufgaben getroffen haben, aber nicht alle. Und doch können sie alle wichtig sein, und sind sie es nicht für den Anfang, so können sie es doch später sein. Jedenfalls darf keiner übergangen werden. Wenn man z. B. die Lehrsätze aufgestellt hat: $\log. (m n) = \log. m + \log. n$; $\log. (m : n) = \log. m - \log. n$; $\log. (m^n) = n \log. m$, so hat man nur drei Probleme untersucht, nämlich: wie werden multiplicirte Grössen, wie werden dividirte Grössen, wie werden potenzirte Grössen logarithmirt? Warum hat man sich aber nicht auch die Frage gestellt: wie werden addirte oder subtrahirte Grössen logarithmirt, $\log. (a + b) = x$ u. s. w.? Diese Fragen sind nicht zufällig, sie sind eben so wesentlich, wie die anderen Fragen.

Durch die Methode ergeben sich uns alle Probleme gleichsam von selbst, ohne Methode aber werden einige gefunden, andere übergangen, es müsste der grösste Zufall sein, wenn sie vollständig gefunden würden. Die Methode aber schafft die Probleme in ihrer Vollständigkeit, sie zeigt, welche Lehrsätze bewiesen werden sollen, und wie sie bewiesen werden sollen, und sollte es nicht möglich sein, dass sie sogleich bewiesen werden können, so sind sie doch als Probleme ihrer Ordnung nach gegeben. Und es ist immer das Wichtigste, dass man vorerst die Probleme habe. Statt ihnen auszuweichen, geht man ihnen entgegen, man sucht sie auf, und hat in der Methode die Mittel, sie aufs Leichteste zu finden. Ueberdiess hat man die Sicherheit, dass man sie alle finde. Denn z. B. die Combination jeder Operation mit jeder andern muss nothwendig alle möglichen Sätze geben. Die Methode deckt die Lücken auf und füllt sie aus. Wenn diess schon am Anfange geschieht, wie viel mehr wird diess in den späteren Theilen einer Wissenschaft geschehen müssen? Ferner giebt sie jeder Wahrheit ihre bestimmte und nothwendige Ordnung. Und hat man die Methode erfasst, so braucht man nicht ängstlich zu sein, wie man sechs oder zehn Lehrsätze oder mehrere im Gedächtniss behalte, denn man wird sie augenblicklich wieder finden und herstellen können. Die Methode giebt allerdings mehr, als die blossе Wissenschaft. Aber diess Mehr, was noch hinzukommt, ist kein Mehr für das Lernen und für die Anstrengung, es erleichtert vielmehr das Lernen, und macht die Anstrengung zu einer bleibenden Erhebung des Geistes zu sich selbst.

Diese wenigen Erklärungen mögen zeigen, dass man durch die Methode allerdings selbst in bekannten Wissenschaften wichtige Aufschlüsse erhalten könne. Durch die Methode entstehen die Probleme in ihrer Ganzheit und Vollkommenheit, wie mit einem Schlage, und sind erst die Probleme gefunden, so wird die nämliche Methode auch die Mittel haben, sie in Lehrsätze umprägen zu lehren.

Was wird die wahre Aufgabe der Methode sein? — Da sie in den innern Bau einer Wissenschaft einführen soll, so wird sie nothwendig die im Systeme einer Wissenschaft verbundenen, zusammenwirkenden Elemente trennen, einzeln hervorheben und untersuchen müssen. Diese Elemente umfassen aber zuerst die *Hilfsmittel*, deren man sich bei der Bildung einer Wissenschaft bedienen muss, dann die *Form*, die *Art* und *Weise*, wie die Lehrsätze dieser Wissenschaft gefunden und bewiesen werden, und endlich den *Stoff*, wie er aus noch unerkannter Grundlage als bestimmter Stoff dieser Wissenschaft gefunden und elementarisirt werden kann.

2 Was zuerst die Hilfsmittel betrifft, die bei der Bildung eines wissenschaftlichen Systems vorausgesetzt und angewendet werden, so ist es unstreitig besser, wenn sie untersucht, als wenn sie unbewusst, ohne alle Prüfung und Untersuchung angewendet werden; denn ein solches Verfahren würde die Möglichkeit nicht ausschliessen, dass man neben dem Nothwendigen und Vernünftigen auch das Zufällige und Unvernünftige träge, und dass man dann aus Unkenntniss das Misslingen der Wissenschaft dem Wesen des menschlichen Geistes und nicht vielmehr dem unrichtigen und fehlerhaften Gebrauche der Hilfsmittel zur Last legte.

3 Das zweite Element jedes wissenschaftlichen Systems umfasst die Art und Weise, wie alle einzelnen Erkenntnisse gefunden und in gegenseitige Verbindung gebracht werden. Das Einzelne für sich betrachtet, scheint ins Unendliche zu gehen, und jede Uebersicht und Wissenschaft unmöglich zu machen; es müsste für jedes Einzelne zufällig bleiben, ob es gerade gewusst würde oder nicht. Werden aber die einzelnen Erkenntnisse verbunden und in ein System gebracht, so entstehen statt vieler einzelner, zerstreuter und zufälliger Erkenntnisse Systeme von Erkenntnissen, die nicht ins Unendliche gehen können, sondern in sich begrenzt und übersichtlich sein müssen. Es ist daher zu zeigen, wie ein ganzes Gebiet zusam-

mengehöriger Erkenntnisse wissenschaftlich ermessen, wie von einer ersten Wahrheit zu einer zweiten, und dann zu einer dritten u. s. w. zu allen nachfolgenden Wahrheiten nach sicherem und allgemeinem Gesetze fortgeschritten werde. Wo immer ein System einer Wissenschaft auftritt, da muss der gegenseitige Zusammenhang aller Wahrheiten vorgebildet und durchgebildet sein; wäre diess nicht der Fall, so wäre es nicht System; und bezieht sich die Untersuchung wie bei der Mathematik auf ein umfangreiches und sicheres System von Erkenntnissen, so kann sie nicht bei den blossen Anfängen stehen bleiben, sondern sie wird eine Uebersicht des ganzen Systems geben, und die gleiche Kraft der Methode bei dem Einfachen und Leichten, wie bei dem Zusammengesetzten und Schweren zeigen müssen, damit sie lehrreich werde für alle Wissenschaften, welche die Vorschule der blossen Namengebungen, Worterklärungen und Beschreibungen verlassen, und den schweren Weg der Wissenschaft, den Weg der Beweise betreten wollen.

Als drittes Element eines wissenschaftlichen Systems stellt sich die Unterscheidung und Feststellung eines bestimmten wissenschaftlichen Gebiets heraus. Entweder wird die allgemeine Wissenschaft, welche alle besondern Wissenschaften umfasst, untersucht, wenn es eine solche allgemeine Wissenschaft giebt, oder es werden die besondern Wissenschaften untersucht, und dann muss für jede ein besonderes und unterscheidbares Gebiet festgestellt werden. Dadurch wird der Stoff jeder Wissenschaft gewonnen, der sofort zum Inhalte aller Wahrheiten dieser Wissenschaft erhoben werden soll.

Diese angeführten Elemente der Methode sind vor Allem zu erläutern. Denn Organe, die nicht untersucht sind, können nicht als solche gelten, und werden sie dennoch, und unbewusst angewendet, so wird nichts Zuverlässiges gewonnen, weil nicht daran gedacht wird, was man ihnen mit Recht zutrauen, und was man hingegen auf keine Weise von ihnen erwarten dürfe.

Unerprobte Kräfte sind gleichsam todte, nicht vorhandene Kräfte und gelten nicht in der Wagschale des Erfolgs.

Zwar wird in jeder wahren Wissenschaft die wahre Methode ausgeübt, und man erlangt sie, indem man diese Wissenschaft erlangt; aber dennoch ist es gut, wenn sie besonders herausgehoben, wenn untersucht wird, wie es Diejenigen, die in irgend einer Wissenschaft Rühmliches geleistet haben, angefangen, die wahren Sätze zu finden und zu beweisen. Es kömmt nicht sowohl darauf an, dass eine bereits vorhandene Wissenschaft erlernt werde; Hauptsache ist es vielmehr, dass die Wissenschaft gefunden werde; oder wenn sie schon gefunden ist, so solten wenigstens ihre Prinzipien so ursprünglich erkannt werden, als sei es Aufgabe, aus ihnen die Wissenschaft neu aufzubauen und zu fördern. Und immer wird in jeder Wissenschaft etwas zu fördern und vollkommen zu machen sein.

Insbesondere in der Mathematik kann es erfolgreich sein, wenn ihre Methode selbst untersucht wird. Denn in keiner Wissenschaft ist es so leicht und zugleich so schwer, diess auszuführen; so leicht, weil die Mathematik wirklich Methode enthält, und weil man sicher sein kann, dass man sie in ihr finden werde, wenn man sie sucht; so schwer, weil die mathematischen Wahrheiten so entfernt und abstract sind, dass der lebendige Zusammenhang des Wissens, der letzte Grund aller Erkenntniss nur mit Anstrengung erhoben und bewahrt werden kann. Es wird daher in dieser Wissenschaft mit besonderm Eifer darnach zu ringen sein.

Von der Mathematik ist bekannt, dass sie zwar eine feste und sichere Wissenschaft sei, dass sie aber eine Einrichtung habe, die sie von allen übrigen Wissenschaften unterscheide. Sie ist einsam unter ihnen, und ist nicht in den Kreis der Philosophie gezogen, nicht begriffen worden. Es ist also wünschenswerth, dass erkannt werde, wie sie zu ihren Resultaten gelangt sei, ob es in ihrem Stoffe, oder in ihrer Methode liege,

dass sie Wahrheiten finden und beweisen könne, sicherer und einleuchtender, als die andern Wissenschaften, und ob die andern Wissenschaften denselben Weg betreten können oder nicht, den die Mathematik betreten hat. Hier ist nichts anders zu thun, als zu untersuchen, was die Mathematik bewusst oder unbewusst in der Bildung ihres Systems ausgeübt habe; diess soll hervorgehoben, zusammengestellt und begriffen werden. Es ist ja immer noch die Möglichkeit gegeben, dass sie vielleicht nur stückweise in rechter Methode vorangegangen, und dass innerhalb ihrer selber noch Lücken auszufüllen seien. Man fasse die Methode einmal selbst ins Auge, untersuche sie nach allen ihren wesentlichen Eigenschaften; vereinige Alles, prüfe Alles, um zu finden, ob sie in einem Gusse gelungen sei oder nicht. Jedenfalls werden selbst die gewonnenen Resultate sicherer sein, wenn man auf diesen Gegenstand eine vorzügliche Aufmerksamkeit richtet, als wenn man über ihn hinwegsieht, als ob er sich ganz und gar von selbst verstünde.

Die Methode aber kann nichts Ausserliches einer Wissenschaft sein, sie muss ganz in's Bewusstsein erhoben werden, man kann sie entweder nur ganz oder gar nicht haben. Sie ist gleichsam das königliche Schiff, das die Gewässer durchschneidet und die Länder verbindet. Wer sie nicht kennt, der wird die Brücke suchen, die Andere für ihn gebaut haben sollen, er wird sie nicht finden können, denn der Ocean trägt keine Ketten, er wird bleiben, wo er ist, und wird nicht glauben, dass Andere gesehen haben, was ihm zu sehen unmöglich sein wird. — Wer aber die Methode auf die rechte Art hat, der achtet die Wissenschaft, er ist nicht gleichgültig gegen sie und betrachtet das Wissenswürdige, und die Kunst, das Wissenswürdige zu finden, nicht als Mittel zu etwas Anderem, das auch gegen Anderes umgetauscht werden könnte. Er wird durch seine Wissenschaft zu seiner eigenen Bestimmung erhoben, dass er etwas kenne und in sich trage, was wahrhafte Geltung anspreche, und die Gedanken der Beson-

nenen anziehe, und dass er ihm alle seine Bestrebungen, Wünsche und Erkenntnisse zuwende. Er wird in allen einzelnen Wissenschaften nicht das Einzelne und Getrennte, sondern das Allgemeine und Bleibende, ihren ewigen Grund im Auge haben, und nicht nachlassen, darnach zu ringen, bis er alles Einzelne und Entfernte mit den letzten Gründen in nothwendige Verbindung gebracht habe, bis er das Wahre in Allem wieder erkannt, und in dieser Erkenntniss Alles, was Andern als gleichgültige Sache, als blosses geltungsloses Mittel erscheinen möge, zum Range eines wahrhaft Wissenswürdigen erhoben habe. Denn in Allem ist der Keim hoher Wahrheit, die Kunst ist nur ihn wahrnehmen und erkennen zu lernen. —

Man könnte die Methode aus der allgemeinen oder formalen Logik entlehnen wollen; denn diese handelt allerdings von der Methode, ja sie ist, wenn sie überhaupt etwas ist, nichts anderes, als die allgemeine Methodenlehre selbst. Dass sie aber etwas sei, wird nicht mehr allgemein zugegeben, indem Einige ihr eine reale dialectische Bewegung des Begriffs substituiren, Andere anders, z. B. eine physische Bewegung, was unglaublich scheinen mag. Aber wer hat alle Wunder der Logik gesehen?

So verschieden auch die Urtheile sein mögen, die über die formale Logik, als wirkliche Wissenschaft gefällt werden, so wird man doch immerhin zugeben müssen, dass sie wenigstens eine mögliche Wissenschaft sein werde. Es müssen sich die Gesetze auffinden lassen, nach denen Diejenigen verfahren sind, die irgend eine Wissenschaft gegründet und gefördert haben. Vergleicht man daher die Methoden mehrerer Wissenschaften, so wird sich etwas Gemeinschaftliches herausstellen müssen, weil sie alle von einem und demselben menschlichen Geiste begriffen werden. Diess Gemeinschaftliche muss gefunden werden können, und diess ist die formale Logik oder Methodenlehre. Sie muss die allgemeinen Gesetze des Denkens aufstellen können, ohne Rücksicht auf den besondern Inhalt, der in verschiedenen Wissenschaften verschieden ist. Das Be-

sondere wird Sache der besondern Wissenschaft sein, aber Sache der Logik wird sein, zu zeigen, wie überhaupt Wahrheiten gefunden und bewiesen werden können, ohne dass die Vernunft mit sich selbst in Widerspruch gerathe. Der Nerv der Methode, Wahrheiten zu finden und zu beweisen, wird nicht in dem jedesmaligen und verschiedenen Stoffe, sondern in der einen und selben Vernunft liegen, und diess soll gezeigt werden. Diess ist die *mögliche* Logik.

Aber das Schwanken in der wirklichen Logik, ist es nicht ein deutliches Zeichen, dass ein Verweisen auf sie eine höchst missliche Sache sein werde? Die Logiker behaupten zwar, dass die Mathematik nur ausübende Logik sei, aber die Mathematiker wollen es nicht Wort haben, dass die Logik eine Anleitung zur Mathematik sei. Sie haben ihre Entdeckungen für sich allein gemacht, sie haben ihre Wissenschaft im grossartigsten Massstabe bereichert. Der Logik haben sie keine Ehre gegeben. Ja, wie die Sachen jetzt stehen, darf man ohne Scheu behaupten, dass keine von den vielen Darstellungen der Logik zur Erfindung und Erhärtung auch nur eines einzigen mathematischen Lehrsatzes gedient habe. Die Mathematiker haben die Vorschriften nicht befolgt, die in der Logik gegeben werden, oder vielmehr, in der Logik werden diejenigen Vorschriften nicht gegeben, welche die Mathematiker befolgt haben.

Selbst schon im Beginne des neuen Fortschritts der Mathematik im siebenzehnten Jahrhundert, als *Kepler*, *Galilei*, *Descartes*, *Pascal* die Bahn eröffneten, die zu so grosser, so erstaunungswürdiger Vollkommenheit der Mathematik führen sollte, haben sie eine feindselige Stellung gegen die Logik und ihre Lehren eingenommen, und *Descartes* hat geradezu ein neues Werk über die Methode geschrieben, zum Beweise, dass er sie nicht in der Logik gefunden habe. Auch *Pascal* hat zu jener Zeit in kurzen und scharfen Zügen seine Erfahrungen über die Methode den logischen Erfahrungen feindlich gegenüber gestellt.

Es ist also besser, statt auf eine fremde, und wie es scheinen könnte, unfruchtbare Wissenschaft zu verweisen, sogleich die Sache selbst, wie sie ist, anzugreifen. Die Mathematik ist es werth, dass man sie untersuche, denn sie hat bewiesen, dass sie im Stande sei, Wissenschaft einzuleiten und zu fördern. Sollte aber die mathematische Methodenlehre dennoch mit der Logik zusammentreffen, sollte sie so allgemein werden, dass sie die Grundzüge der Methode aller Wissenschaft enthielte oder wenigstens nicht ausschlosse, so wird es um so besser sein; wir werden der Logik die Ehre geben. Irgend eine Gemeinschaft einer besondern Methode mit der allgemeinen Methode muss statt finden; denn alle Wissenschaften haben ein gemeinschaftliches Band, sowohl den Wahrheiten nach, die sie enthalten, als dem menschlichen Geiste nach, die sie alle ohne Ausnahme umfassen kann. Wir werden es nicht abweisen können, in dieser Untersuchung gerade das Allgemeine hervorzuheben und zu erkennen.

Zweite Untersuchung.

Ueber die mathematische Methode.

Wir kommen zu der Methode, wie sie von den Mathematikern im Gegensatze zu der logischen Methode aufgestellt worden ist. Hier muss unterschieden werden, einmal wie die Methode im System selbst angewendet und befolgt worden ist, und dann, wie sie als Urtheil über die Methode, als Lehre ausgesprochen worden ist. Ist die Vollkommenheit erreicht, so müssen beide übereinstimmen, die wirkliche und ausgeübte, und die erkannte und ausgesprochene Methode. Zeigte sich aber Verschiedenheit, so müsste irgendwo etwas Mangelhaftes und Unvollkommenes sein, entweder in der Ausübung oder in der Erkenntniss.

Wir wenden uns zuerst an die erkannte und ausgesprochene Methode. Sie ist schon durch die Sprache zugänglicher, gemacht, und nichts ist bekannter und gleichsam menschlicher, als Sprache und Erkenntniss. Es wird nur darauf ankommen, dass das beste der vorhandenen Urtheile über die Methode hervorgehoben und geprüft werde. Die Wahl ist nicht schwer denn die Mathematik hat an *Pascal* einen eben so scharfsinnigen als geübten Interpreten gefunden, der zudem sogleich am Anfange auftrat, als sich mit dem Beginne der Analysis die Fragen über die Methode geltend machten. Er hat seine Gedanken mit eben so grosser Einfachheit und Entäusserung der Sprache als grosser Hoffnung auf Erfolg ausgesprochen,

und er hat die ganze Energie gezeigt, die jeden Anfang auszeichnet, der nicht blosser Anfang bleiben, sondern über sich hinaus an ein fernes und letztes Ziel hinführen soll. Wenn aber dennoch die ausgesprochene und gelehrte Methode mit der wirklichen und ausgeübten nicht übereinstimmen sollte, so werden wir zu dieser selber übergehen, und aus ihr, als der letzten Quelle, die einzig mögliche und nothwendige Belehrung schöpfen müssen.

Pascal behauptet von der mathematischen Methode, dass sie zwar die vollkommenste sei, die erreicht werden könne, nicht aber die vollkommenste, die sich überhaupt denken lasse. Diese letztere sei unerreichbar, und was die Mathematik überschreite, überschreite uns selbst.

Die wahre Methode, so fährt er fort, bestünde hauptsächlich in zwei Dingen; einmal, dass man Alles definirte und dann, dass man Alles bewiese. Definitionen und Beweise seien die Grundpfeiler jeder Wissenschaft. Die Definitionen kürzen die Wissenschaft ab und hellen sie auf, indem sie jedem Worte die nothwendige Bestimmtheit geben. Dadurch sind sie im Stande, jede Zweideutigkeit auszuschliessen und die Fallstricke der Sophistereien und Wortstreitigkeiten zu vernichten. Ebenso geben die Beweise allen Sätzen die nothwendige Gewissheit, indem sie die noch ungewissen Sätze mit bereits erkannten und bewiesenen Sätzen in nothwendigen Zusammenhang bringen, und ihnen dadurch diejenige Wahrheit mittheilen, welche die bereits gewissen Sätze auszeichnet.

Beweisen heisst also, einen Satz mit einem schon gewissen Satze in einen nothwendigen Zusammenhang bringen; und definiren heisst, dasjenige, was man zuvor genau bestimmt hat, und was man nur mit mehreren Worten geben könnte, in ein einziges Wort zusammenfassen. Findet man z. B. in der Arithmetik für nothwendig, alle ganzen Zahlen, die durch 2 theilbar sind, von denjenigen, die es nicht sind, zu unterscheiden, so giebt man den ersteren, um die öftere Wiederholung dieser

Bedingung zu vermeiden, folgende Definition: jede Zahl, die durch zwei theilbar ist, wird eine *gerade* Zahl genannt. Diess ist eine mathematische Definition, weil dem Gegenstande, nachdem er klar genug bestimmt ist — *nämlich jede Zahl, die durch 2 theilbar ist* — eine Benennung — *gerade Zahl* — gegeben wird, die jedes andern Sinnes entkleidet, einzig und allein nur dem durch sie bezeichneten Gegenstande zukommt.

Daraus scheint zu folgen, dass man sehr willkührlich definiren, und doch jeden Widerspruch mit sich selbst vermeiden könne. Und allerdings hat man die Freiheit, einen Gegenstand zu benennen, wie man will, nur hat man die Vorsicht zu gebrauchen, dass man Verschiedenes nicht gleich und Gleiches nicht verschieden benenne, und dass man aus einer Definition nicht etwas folgere, was nicht in ihr ist. Dazu könnte man verleitet werden, wenn man vergässe, dass man das definirte Wort eben durch die Definition jedes andern Sinnes, den es etwa im gewöhnlichen Sprachgebrauche haben möchte, entkleidet habe. Doch diess ist mehr ein Fehler der Unachtsamkeit, und kann durch Aufmerksamkeit in Uebung leicht vermieden werden.

Nun spricht *Pascal* seinen Hauptsatz aus, dass die wahre Methode darin bestünde, dass Alles definirt und Alles bewiesen würde. So schön aber diese Methode sei, so unmöglich sei sie, denn schon die ersten Worte, die man definiren wollte, setzten frühere undefinirte Worte voraus, durch die sie definirt werden könnten, und eben so setzten die ersten zu beweisenden Lehrsätze frühere nicht bewiesene voraus, durch die sie bewiesen werden könnten. Geht man daher bis auf den Anfang zurück, so kömmt man nothwendig auf ursprüngliche Worte, die nicht mehr definirt werden, man kömmt auf Prinzipien, die so einleuchtend sind, dass man keine einfachern und klarern findet, die ihnen zum Beweise dienen könnten.

Daraus sieht man, fährt *Pascal* fort, dass die Menschen in einem natürlichen, nicht mehr zu ändernden unvermögenden Zustande seien, irgend eine Wissenschaft, welcher Art sie

auch sein möge, in einer vollkommenen Ordnung zu behandeln; aber es folgt daraus nicht, dass man jede Art von Ordnung und Methode aufgeben dürfe.

Denn es giebt eine Methode, und diese ist die der Mathematik, die zwar als weniger überzeugend unter der wahren, unerreichbaren, Methode steht, aber als nicht minder gewiss und sicher in ihrem Verfahren und in ihren Resultaten, der wahren Methode gleichgestellt werden kann. Sie definirt nicht Alles und beweist nicht Alles, und darin steht sie *unter* der wahren Methode; aber die Annahmen, die sie macht, sind nur solche, die an sich klar und dem schlichten Verstande einleuchtend sind, und hierin ist sie der vollkommenen Methode ganz und gar gleich zu stellen.

Es besteht also die möglichst vollkommene Methode weder darin, dass man Alles definirt und Alles beweist, noch auch darin, dass man Nichts definirt und Nichts beweist, sondern darin, dass man klug sei, und den richtigen Punkt treffe, klare und allen Menschen verständliche Dinge nicht definire, wohl aber alle ändern, und klare, von selbst einleuchtende Sätze und ursprüngliche Wahrheiten nicht beweise, wohl aber alle ändern von ihnen ableitbaren Wahrheiten.

Pascals Behauptungen zerlegen sich in folgende Sätze:

- 1) In der vollkommenen Wissenschaft soll Alles definirt und Alles bewiesen werden.
- 2) In der möglichst vollkommenen Wissenschaft, in der Mathematik, wird weder Alles definirt, noch Alles bewiesen.
- 3) Die Menschen sind in einem natürlichen nicht mehr zu ändernden unvermögenden Zustande, irgend eine Wissenschaft in einer vollkommenen Ordnung und Methode zu behandeln.
- 4) Definiren heisst, dasjenige, was man zuvor genau bestimmt hat, und was man nur mit mehreren Worten geben könnte, in eine einzige Benennung zusammenfassen.

5) Beweisen heisst, einen Satz mit einem schon gewissen Satze in nothwendigen Zusammenhang bringen.

Wenn wir fragen, warum in der vollkommenen, unerschöpflichen Wissenschaft Alles definirt und Alles bewiesen werden sollte, so ist die Antwort: weil sich von den Definitionen und Beweisen die Ordnung, die Klarheit und die Evidenz des Wissens herschreibt.

Was bewirkt die Definition? Ordnung und Deutlichkeit. Und wodurch? Dadurch, dass sie die Untersuchung abkürzt und bestimmter macht, indem sie dasjenige, was nur durch mehrere Worte zerstreut gegeben werden könnte, in einen einzigen bestimmten Ausdruck zusammenfasst. — Worin besteht also der Vorzug und die Kraft und die Unentbehrlichkeit der Definition? Offenbar im Zusammenfassen Mehrerer, in der Einigung Vieler. — Warum ist es aber unmöglich, dass Alles definirt werde? Weil das *erste* Wort schon, das man brauchen wollte, andere Worte voraussetze, durch die es bestimmt werden müsste, so dass es selbst nicht mehr das erste Wort sein könnte.

Hier zeigt sich ein Widerspruch, der hervorgehoben werden muss. Zuerst und mit Wissen bestimmt *Pascal* die Definition als eine Einigung, als ein Zusammenfassen mehrerer Worte oder Begriffe; und dann bringt er unter der Hand und unmerkelt eine zweite Bestimmung, indem er behauptet, die Definition sei eine Umschreibung eines Wortes durch mehrere andere, was das gerade Gegentheil seiner absichtlich und bewusst gemachten Behauptung ist. Bewusst bestimmt er die Definition als ein Zusammenfassen Mehrerer in Eines, unbewusst bestimmt er sie als ein Zerstreuen Eines in Mehrere, indem er sagt: dass die ersten Worte, die man definiren wollte, andere voraussetzten, die zu ihrer Erklärung (Explication) dienten.

Wenn nur diejenige Definition Licht verbreitet, welche mehrere Bestimmungen in *eine* zusammenfasst, die also etwas ihr Vorausgehendes hat, was zu einer neuen Verbindung gebracht werden kann und soll, so ist der Satz aufzugeben,

dass in der vollkommenen Wissenschaft *Alles* definirt werden müsse. Denn das Erste könnte nicht zusammengefasst, wohl aber zerstreut werden, wodurch statt des Lichtes nur Dunkelheit verbreitet würde.

Was heisst nun beweisen? Antwort: den nothwendigen Zusammenhang eines Satzes mit einem andern schon gewissen Satze darstellen. Sollte es nun die Vollkommenheit der Wissenschaft sein, dass *Alles* bewiesen würde, also auch das Erste, so hiesse das nichts anders, als dass der nothwendige Zusammenhang eines Ersten mit einem unbestimmten und ungewissen Vorhergehenden nachgewiesen werden sollte, was wieder das gerade Gegentheil von dem absichtlichen und bewusst ausgesprochenen Gedanken *Pascals* ist. Von den fünf Sätzen *Pascals* ist also der erste falsch und irrig, so wahr und richtig er auch auf dem ersten Blicke zu sein scheint. Es kann nicht in dem Wesen der absolut vollkommenen Wissenschaft liegen, dass Alles definirt und Alles bewiesen werde. Definitionen und Beweise müssen *ihrer Natur* nach etwas Zweites sein, und es muss ihnen nicht aus Noth und Mangel, sondern aus Natur, Wesenheit und rechten Ordnung etwas vorausgehen, was seiner Anlage nach das Erste in jeder Wissenschaft sein kann. Und so zerstreut sich diese ganze Klarheit der Methode in die Finsterniss des Widerspruchs. Blosser Klarheit kann nicht das Vorausgehende von Definitionen und Beweisen sein, das Vorausgehende muss eine Substanz haben, es muss etwas daran klar gemacht werden können, und dieses Etwas muss durch die ganze Wissenschaft hindurch, also in einer sehr ausführlichen Entwicklung erklärt werden.

Pascal giebt das Ganze seiner Methode in folgenden Vorschriften:

a) *Für die Definitionen.*

- 1) Es darf nichts definirt werden, was durch sich selbst schon so klar ist, dass es durch keinen andern Ausdruck klarer gemacht werden könnte.

- 2) Jeder etwas dunkle und zweideutige Ausdruck ist zu definiren — was wohl von Kunstausdrücken verstanden werden muss, denn dunkle und zweideutige Ausdrücke sind nicht bloß aus der Wissenschaft, sondern auch aus der Sprache zu verbannen. —
- 3) In einer Definition dürfen nur durchaus klare oder schon definirte Worte angewendet werden.

b) Für die Prinzipien.

- 1) Keines der nothwendigen Prinzipien, es mag noch so klar und deutlich sein, darf angewendet und gebraucht werden, wenn nicht vorher erörtert worden ist, ob man es gelten lassen, und wie man es gelten lassen wolle.
- 2) In Prinzipien darf nur durchaus und von sich selbst Klares ausgesprochen werden. — Diess wird nur möglich sein, wenn es etwas von sich selbst Klares und Einleuchtendes giebt. —

c) Für die Beweise.

- 1) Es ist niemals der Beweis eines Satzes zu versuchen, der von sich selbst so klar ist, dass es nichts Klareres gebe, was zu seinem Beweise dienen könnte.
- 2) Alle *etwas dunkeln* Sätze sind zu beweisen, und bei ihrem Beweise dürfen nur ganz einleuchtende Prinzipien oder schon bewiesene Sätze angewendet werden.
- 3) Es ist immer im Geiste die Definition an die Stelle des Definitums zu setzen, damit man nicht durch die Zweideutigkeit der Ausdrücke getäuscht werde, und aus dem Definitum mehr folgere, als man durch die Definition hineingelegt hat.

Pascal wusste, was er an diesen Vorschriften hatte, und mit welcher Mühe er sie gefunden und ausgesondert hatte. Er sagt: Man kann einwenden, dass alle Welt diese Regel kenne, dass man Alles definire und Alles beweisen solle, und

dass selbst die Logiker sie unter die Vorschriften ihrer Kunst aufgenommen haben. Ich wünschte, dass sich die Sache so verhielte, ich hätte dann nicht nöthig gehabt, die Quellen so vieler wahrhaft allgemeiner Irrthümer mit so vieler Mühe aufzudecken. Aber weit entfernt, dass es sich so verhielte, so sieht man, mit Ausnahme der so seltenen Mathematiker, in der That Niemanden, der jene Regeln befolgte. Es wird leicht sein, diess Denjenigen verständlich zu machen, die das Wenige, was ich darüber gesagt habe, vollkommen begriffen haben; haben sie es aber nicht begriffen, so gestehe ich, dass sie hier nichts weiter zu begreifen haben.

„Wer aber in den Geist dieser Regeln eingedrungen ist, und sie so in sich aufgenommen hat, dass sie in ihm Wurzel fassen und sich befestigen können, der wird wohl fühlen, **welch** ein Unterschied sei zwischen dem, was hier gesagt ist, und zwischen dem, was einige Logiker vielleicht auf gut Glück in einigen Stellen ihrer Werke näherungsweise und mit Irrthümlichem vermischt getroffen haben.

„Wer den Geist des Urtheils hat, der kennt den Unterschied, den Ort und Umstände zwischen einem und demselben Worte machen. Glaubt man wohl in Wahrheit, dass zwei Personen, die ein und dasselbe Buch gelesen haben, es auf gleiche Weise verstehen? Wenn der Eine alle die darin enthaltenen Prinzipien, die ganze Kraft der Folgerungen, alle Antworten auf mögliche Einwendungen und die ganze Oekonomie des Werkes versteht, während es dem Andern nur todte Worte sind, Samen, die bei dem Einen keimen und Früchte tragen, bei dem Andern aber unfruchtbar bleiben, weil sie auf dürres Erdreich gefallen sind — wird man wohl sagen können, dass sie beidedas Buch auf gleiche Weise gelesen haben und verstehen?

„Ein und derselbe Gedanke, der bei dem, der ihn zuerst hatte, in seinem mütterlichen Boden, unfruchtbar bleibt, wuchert manchmal überreich, wenn er verpflanzt wird. Aber weit häufiger ist es der Fall, dass der gute Kopf seine Gedanken selbst

pfl egt und gross zieht, dass er aus ihnen allen den Reichthum schöpft, der in ihnen liegt, und dass dann Andere, die von seinem Ruhme gehört haben, kommen, und Früchte brechen wollen, die sie nicht gezogen haben, und deren Vortrefflichkeit sie nicht kennen — ergiebt es sich da nicht von selbst, wie gross die Verschiedenheit sei, den ein und dasselbe Wort bei dem Einen und bei dem Andern habe?

„So haben vielleicht die Logiker ihre Regeln von der Mathematik entlehnt, ohne ihren Werth zu kennen, und wenn sie dieselben mit ihren eigenen Regeln untermischt geben, so folgt daraus noch keineswegs, dass die Logiker in den Geist der Methode eingedrungen seien; ja wenn sie von ihren Fortschritten keine besseren Beweise als bisher geben können, so bin ich weit entfernt, sie mit den Mathematikern zu vergleichen, die allein die wahre Methode lehren und ausüben.

„Wenn z. B. Jemand drei Wege vor sich hätte, von denen nur einer zum Ziele führte, und wenn er sich rühmen wollte, er kenne den rechten Weg, weil er ihn doch unter den drei möglichen Wegen vor Augen habe, und wenn er Einem, der ihm den rechten Weg zeigte, antworten wollte, er kenne den Weg schon, denn er habe ihn ja vor Augen, so würde er ganz und gar einem Logiker gleichen.

„Die Irrthümer sind Krankheiten, die sich durch die wahre Methode heilen lassen. Vermischt man aber die Vorschriften der wahren Methode mit andern Vorschriften, giebt man gute und schlechte Mittel durcheinander, so werden auch die guten Mittel ohne Erfolg bleiben.“

— Diess die mathematische Methode. — Untersuchen wir sie genauer, so sind in ihr allerdings grosse Vorzüge nicht zu verkennen, aber dennoch wird auf der Stelle auffallen, dass die Vorschriften für Definitionen und Beweise ohne wahren Grund sind, und gleichsam in der Luft schweben. Es sollen ihnen blos die klaren Worte und die klaren Sätze vorausgehen. Welche diese klaren Worte und Sätze aber seien, wird nicht

gesagt. Es ist nicht zu verwundern, wenn *Pascal* an die Definitionen und Axiome der Mathematik gedacht hat. Sie waren seinem Geiste gegenwärtig, nur hat er es versäumt, sie in seiner Methode mitzutheilen.

Dennoch werden Zusätze gemacht werden müssen. Wenn Definitionen darin bestehen, dass mehrere Begriffe verbunden seien, für welche durch die Definition ein Kunstausdruck eingeführt werden soll, so ist es immer Hauptsache, dass vorerst eine Verbindung da sei, die schon richtig und wahr ist, und für welche nur der Kürze und Deutlichkeit willen ein einziges Wort substituirt werden soll. In den Definitionen kann niemals die Verbindung der Begriffe selbst in Zweifel gestellt oder bewiesen werden, denn diess ist Aufgabe der Beweise. Und ist einmal die Verbindung der Begriffe gefunden und gesichert, so wird sich auch ein Wort für diese Verbindung finden lassen.

Dabei ist Doppeltes zu erinnern. Einmal muss jede Definition eine sogenannte Namen-Definition, nicht eine Sach-Definition sein. Eine Sach-Definition ist eine solche, welche die Verbindung der Ideen feststellen (beweisen) will, statt sie, wenn sie schon durch Anderes festgestellt und bewiesen ist, bloss zu benennen. Diese Sach-Definitionen sind lauter versteckte Lehrsätze, die unter dem Schutze der Definitionen die Last der Beweise von sich abweisen wollen. Z. B. der Satz: Gott ist Ursache seiner selbst, oder: unter Gott verstehe ich die Ursache seiner selbst, ist keine Definition sondern ein Lehrsatz, der allerdings nur angenommen werden darf, wenn er bewiesen werden kann. — Diess heisst freilich die Ordnung der Wissenschaft umkehren, einen Namen nehmen und dafür erst einen Gehalt suchen. — Da in der Mathematik die Lehrsätze und die Definitionen aufs Strengste unterschieden werden, so finden sich in ihr blos die Namen-Definitionen, und diese strenge Unterscheidung, die Herausstellung der Lehrsätze als Lehrsätze hat ihr grösstentheils die Sicherheit ihrer Resultate erworben.

Ferner darf nur dasjenige definirt werden, was wirklich der Definition werth ist, nämlich nur dasjenige, für welches eine bestimmte und eigenthümliche Verbindung bestimmter Begriffe bereits vorhanden ist. Es ist nicht der Mühe werth, jede unreife Verbindung zu definiren. Wir haben ein Beispiel, wie Definitionen nicht sein sollen, in der Proportionslehre der Mathematik, worin sich viele überflüssige Kunst preisgegeben hat, wie die Definitionen: *Ex aequo simpliciter; ordinatim et ex aequo*, und wie sie alle heissen mögen, die das Gedächtniss belästigen, und im Deutschen nicht einmal einen Namen haben. Und mit Recht, denn sie sind alle in der einen Operation der Gleichungen enthalten, und sie können jeden Augenblick ausgeführt werden. Es ist daher überflüssig, besondere Namen für besondere Fälle zu erfinden. In der unnützen Vermehrung der Definitionen zeigt sich die Kindheit der Wissenschaft, und der Geist derer, die in dieser Kindheit bleiben; Diejenigen, die weiter schreiten, werden Wichtigeres inne, das noch erforscht und eingereicht werden muss, und dessen Platz nicht durch Unwichtiges eingenommen werden darf.

Allerdings ist es aber einigermaßen willkürlich, welche Namen es seien, die bestimmten Verbindungen bestimmter Begriffe gegeben werden, obgleich auch hier die Sprache und ihre Gesetze eine nothwendige Schranke setzen müssen. Mögen zwar die Namen der Definitionen gleichgültig sein, so sind es doch die durch sie bezeichneten Verbindungen von Begriffen nicht. Habe ich z. B. eine bestimmte Figur Dreieck genannt, und wird nun bewiesen, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks gleich zweien rechten Winkeln sei, so gilt diess nicht etwa von dem *Namen* Dreieck, sondern von der bestimmten Einheit der bestimmten Begriffe; und wie ich diese auch genannt haben würde, es würde trotz der Verschiedenheit der Benennung dasselbe gelten müssen. Die Namengebung ist gleichsam nur eine Uebersetzung aus einer Sprache in eine andere. So können wir vermöge der mathematischen Zeichensprache in

irgend einem Problem die Zeit mit a und den Raum mit b übersetzen. Wird dann zuletzt der gesuchte Ausdruck gefunden, so muss wieder a durch Zeit und b durch Raum interpretirt werden. Hätte ich aber Zeit durch b und Raum durch a bezeichnet, so würde ich ganz genau denselben Ausdruck gefunden haben, nur stünde überall b statt a und a statt b . Es würde daher die Interpretation der vorausgehenden Uebersetzung entsprechen müssen. Die Wahrheit liegt also nicht in den Worten, denn Uebersetzung und Interpretation gleichen sich wieder aus, sondern in der Sache, in der bestimmten Verbindung der bestimmten Begriffe.

Von grosser Wichtigkeit sind die Definitionen allerdings, und sie verdienen es, dass sie mit aller Schärfe, Bündigkeit und Schönheit gegeben werden. Schade ist es, dass man nicht Alles definiren kann, wenn es wahr ist, dass Alles definirt werden soll, was wir bezweifeln. Dieser Mangel würde uns die ganze Wissenschaft hindurch belästigen müssen. Wer wollte eine Wissenschaft mit einer Bitte oder Entschuldigung beginnen? Und die Behauptung, dass Einiges für sich selbst klar und deutlich sei, was ist sie denn anders, als eine Bitte und Entschuldigung? Wenn sie nun Andere nicht als solche gelten lassen wollten, was wäre zu thun; welche Mittel hätten wir, sie zu überzeugen und zu belehren? Ja wir hätten nicht einmal die Mittel, uns selbst zu überzeugen und zu belehren.

Wie dem aber auch sein möge, die Schwierigkeit der Definitionen wird nicht in der Namengebung, sondern in der vorhergehenden Verbindung der Begriffe liegen. Diese setzt die Definition als wahr und gültig voraus, ehe sie ihr einen Namen giebt. Als wahr und gültig werden aber die Verbindungen nur durch die Beweise erkannt, auf diese wird die grössere Last fallen, wie es auch nicht anders zu erwarten war.

Aber gerade die gegebenen Regeln für die Beweise sind so ungenügend, dass nur wenig Hilfe von ihnen zu erwarten

ist. Was soll das sein, dass alle etwas dunkeln Sätze bewiesen werden sollen. Was ist für ein Unterschied zwischen dunkel, etwas dunkel, ziemlich klar u. s. w.? Etwas dunkel werden alle Sätze sein, ehe sie erkannt sind, und die Prinzipien, die nicht mehr bewiesen werden können, sind am Anfange gewiss etwas dunkel, wenn nicht mehr als etwas dunkel, sie sind dunkler als alle aus ihnen abgeleiteten Sätze. Sie sollen gerade durch ihre Wissenschaft erhellt und erklärt werden. Es ist ferner nicht hinreichend, dass man Sätze bloß beweise; die Hauptsache ist, dass man die Sätze vorerst habe, die man sodann beweisen könne. Wie werden diese Sätze gefunden? Dieser Methode des Findens und Forschens ist auch nicht mit einem einzigen Worte gedacht worden. Wesentlich ist dann endlich, dass man erkenne, nach welchem Schema, oder nach welchen Gesetzen, oder wie überhaupt die Beweise geführt werden, ob aus der Erfahrung, oder aus der Vernunft, oder aus andern Wissenschaften, ob durch Syllogismen, oder durch Contradiction, oder wie immer; es muss gesagt werden, ob die möglichen Beweisarten ins Unendliche gehen, oder ob sie ihrer Anzahl nach begrenzt seien, und welche sie seien.

Hier finden sich Lücken und Dunkelheiten, dass sogar die Logik mit der mathematischen Methode wetteifern darf. Es ist ein Auflehnen gegen die schwerfälligen und ungenügenden Vorschriften der Logik, die sich in der Anwendung auf Mathematik ganz unbrauchbar gezeigt haben, es sind statt ihrer einige gute, einfache und nützliche Vorschriften gegeben, aber dasjenige, was sie erst recht gut, nützlich und vortheilhaft für den Gebrauch machen könnte, ist übergangen worden.

Jedenfalls ist klar, dass das Wesen der wissenschaftlichen Wahrheiten in ihren Beweisen liege, dass alle Sätze einer Wissenschaft in einem solchen Zusammenhange stehen, dass sie alle auseinander abgeleitet, oder miteinander in Zusammenhang gebracht werden können, die späteren mit den früheren. Diess ist auch ihre Ordnung, die Ordnung der Beweise. Und unbe-

denklich darf ausgesprochen werden, dass eine Wissenschaft um so vollkommener sei, je mehr sie Beweise habe. Nur gegen die letzte Folgerung in dieser Reihe, dass nämlich die ganz vollkommene Wissenschaft alle ihre Sätze beweisen müsse, erhebt sich die Schwierigkeit, dass es unmöglich sei, alle Sätze zu beweisen. Denn besteht das Wesen der Beweise darin, dass die neuen Sätze mit den schon bekannten und bewiesenen Sätzen in einen nothwendigen Zusammenhang gebracht werden sollen, so können die ersten Sätze der Wissenschaften nicht bewiesen werden. Mit welchem bewiesenen Satze soll der erste Satz einer Wissenschaft in nothwendigen Zusammenhang gebracht werden, da er keinen ihm vorausgehenden Satz in dieser Wissenschaft haben kann? Zudem sollte ja das Beweisen selbst, die That, durch welche die Sätze in nothwendigen Zusammenhang gebracht werden, eine sichere, gewisse und wahre That sein, die sie ja auch erst durch die Beweise werden könnte. Wie sollte aber der Beweis bewiesen werden?

Hier finden sich also Schwierigkeiten ähnlicher Art, wie bei den Definitionen. Nehmen wir sie einfach als solche hin, ohne sie zu lösen, so lauern schon am Anfange der Wissenschaften Schwierigkeiten und Dunkelheiten, die sich der ganzen Wissenschaft mittheilen werden.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung. Will man auch der Wissenschaft, in Erwägung ihrer Schwierigkeiten — denn dass sie etwas Leichtes sei, wird Niemand, der sich in ihr versucht hat, behaupten wollen — einige Zugeständnisse machen, so muss diess doch um der Wissenschaft selbst willen eine bestimmte Grenze haben. Gesetzt man wollte zugeben, dass sie einige Definitionen und klare Worte voraussetze, so muss sie doch anzugeben im Stande sein, wie viele und welche Worte und Begriffe sie als klar voraussetze, damit nicht mitten in der Untersuchung wieder neue und immer neue hinzukommen, und zuletzt jede Uebersicht und Einsicht unmöglich machen. Der Billigkeit von der einen Seite muss die Bescheidenheit von der

andern Seite entsprechen. Gesetzt man wollte einige Axiome oder Prinzipien zugeben, so müsste doch jede Wissenschaft erklären können, welche und wie viele Axiome sie voraussetze, damit nicht bei jeder neuen Schwierigkeit neue Axiome auftauchen, von denen man gar nicht absehen könnte, zu welcher Anzahl sie endlich bei den Fortschritten der Wissenschaften anwachsen würden. Das Wenigste, was gefordert werden kann, ist, dass ganz bestimmt erklärt werde, diese Axiome und keine anderen werden in der ganzen Wissenschaft angewendet werden. Dasselbe gilt auch von den Beweisarten. — Es müssen alle Voraussetzungen ihrer Anzahl und Beschaffenheit nach angegeben werden, dass sie als ein abgeschlossenes, gleichsam abgeschiedenes Gebiet weiterer Forschungen bestehen können.

Zu dieser Einschränkung und Forderung an die Wissenschaft gelangt zu sein, ist das bleibende Verdienst von *Kant*, der es unternommen hat, das ganze mögliche Gebiet menschlicher Erkenntniss dem zu erkennenden Gegenstande und dem erkennenden Geiste nach zu ermessen. Vor ihm und ehe seine Philosophie Geltung erlangt hat, konnten beliebig viele Wissenschaften neben einander bestehen, gelehrt und gelernt werden. Und Niemand war sicher, dass nicht über Nacht und ganz unvermuthet eine neue Wissenschaft ganz nahe an einer schon bestehenden alten Wissenschaft auftauchen und herrschend werden konnte. Diese Unsicherheit musste sich auch den Geistern mittheilen und den Schwung der Gedanken lähmen. Aber die Gewissheit, dass man aus der Natur des erkennenden Geistes selbst eingesehen habe, oder doch endlich einsehen werde, welche Wissenschaften überhaupt möglich seien, und nach welchen bestimmten Gesetzen sie erkannt werden, so dass nicht neben den bekannten und ihrer Anzahl und Wesenheit nach bestimmten Wissenschaften wieder andere kommen und geltend werden können, hat den grossartigen Aufschwung hervorgerufen, welcher jene Philosophie auszeichnet. Es war gleichsam

die Herrschaft über alle Wissenschaft ausgesprochen und Begeisterung ergriff Herrschende und Dienende.

Diese Herrschaft muss aber mit viel grösserem Rechte auf einzelne Wissenschaften übertragen werden; man wird nicht mehr von der Forderung abgehen können, dass man alle Voraussetzungen einer Wissenschaft als bestimmte Voraussetzungen hinstelle und offen darlege. Niemals mehr wird man sich erlauben dürfen, einige klare Begriffe, einige Axiome, einige Beweisarten vorauszusetzen; man wird erklären müssen, welche klaren Begriffe, welche Axiome, welche Beweisarten man als zugestanden voraussetze, damit man die Summe dessen, was man der Wissenschaft schuldig geblieben ist, überschlagen, und der weiteren Forschung vorbehalten könne.

Wir werden daher von der mathematischen Methode sagen dürfen, dass ihre Thaten besser seien als ihre Lehren, und wir werden nicht mehr auf die Lehre allein unser Augenmerk richten, sondern zur Sache selbst übergehen müssen, damit wir einsehen lernen, was die Methode vermöge, und was erreichbar und möglich, und was hinwiederum unerreichbar und unmöglich sei.

Dritte Untersuchung.

Sprachliches und Metaphysisches.

Ich zweifle nicht, dass sich Viele über eine Verbindung von Sprache und Metaphysik wundern werden. Was könnte dem Anscheine nach verschiedener sein, als gerade diese beiden Wissenschaften? Bilden sie nicht gleichsam die äussersten Glieder eines Gegensatzes; die Sprache, ursprünglich, einfach, Allen zugänglich, Allen bekannt, und die Metaphysik, der Gipfel aller Wissenschaften, das Dunkelste und Verborgenste, von der Oberfläche der Sprache hinabführend in die tiefste Tiefe der Erkenntniss? — Es wird zu beweisen sein, dass sich eine solche Verbindung dennoch rechtfertigen, und nicht bloß rechtfertigen, sondern sogar als nothwendig erkennen lasse.

Die Metaphysik hatte ehemals ein solches Ansehen genossen, dass sie allen Wissenschaften den Weihespruch geben konnte: Wisse in allen Dingen so viel, als du in mir gelernt hast. Als dieser Weihespruch seine Wirksamkeit verloren, weil man in allen Dingen nichts hätte wissen können, da man in der Metaphysik nichts gelernt hatte, ist sie gesunken und gleichsam ein herrenloses Gebiet geworden, in welchem Jeder schalten und walten durfte, wie es ihm beliebte. Wie jetzt die Wissenschaften stehen, dürfte es Niemanden verwehrt werden, den Namen der Metaphysik für eine Wissenschaft in Anspruch

zu nehmen, die ihrem Gehalte nach von der ehemaligen Metaphysik himmelweit verschieden wäre. Wenn jedoch nicht blos auf den jetzigen Zustand der Wissenschaften, sondern auf die ganze Geschichte, auf die Reihe aller Zustände Rücksicht genommen wird, so muss der Metaphysik aller Gehalt, den sie ursprünglich hatte, mit Gewissenhaftigkeit bewahrt werden. Welchen Inhalt hatte die Metaphysik bei ihrem Stifter Aristoteles? Sie beschäftigte sich ausschliesslich mit der Frage, durch welche Mittel wir Erkenntniss gewinnen, und wie wir überhaupt zu den Ideen kommen, die den unendlich vielen und zerstreuten, unübersehbaren einzelnen Dingen gegenüber, den wahren und einzigen Gegenstand der Erkenntniss bilden. — Was ist überhaupt Alles der Erkenntniss Mögliche, war die ernste Frage der Metaphysik, auf welche das ewig jugendliche Echo des menschlichen Gemüths antwortet: Alles Mögliche; eine Antwort, die Aristoteles für alle Tieferblickenden dahin auslegte, dass er „alles Mögliche“ in „Nichts Wirkliches“ übersetzte. Jeder der dreizehn Abschnitte seiner bewunderungswürdigen Metaphysik, die mehr Enthüllung seines Geistes ist, als ausdrückliche Lehre, beginnt mit Hoffnung und Freudigkeit, und jede schliesst mit der Einsicht und Entsagung, dass auch in diesem oder jenem Gebiete, mit diesen oder jenen Hilfsmitteln die wahre Erkenntniss und Einsicht und das Wesen der Dinge nicht erreicht werden könne.

Die Frage, wie und durch welche Mittel wir zur Wissenschaft der Dinge selbst gelangen, ist aber ganz übereinstimmend mit der Frage, wie und durch welche Mittel wir die Dinge als Gegenstände der Erkenntniss an uns heranbringen, und in unser Reich einführen, und diese Frage ist durch die ganze Menschheit bereits beantwortet worden, nämlich, dass die *Sprache* allein es sei, welche die erkennbaren Dinge in die Welt unsers Innern einführe und uns zum Eigenthume gebe, wenn auch nicht schon als Erkenntniss, doch als bleibenden Stoff der zukünftigen Erkenntniss.

Die Erkenntniss als ein innerer Vorgang kann nur in unserm Innern gebildet werden, unser Inneres ist es, das wir von Unkenntniss und Irrthum befreien können, nicht aber die Welt und die Dinge selbst, auf die wir so gerne unsern Irrthum, unsere Unwissenheit übertragen möchten. Es ist daher das Wichtigste, dass die zu erkennenden Dinge vorerst in unser Inneres übersetzt und gebracht werden, dass wir sie zu Begriffen, das ist, zu Objecten der Erkenntniss erheben, die wir nun unsrerseits zu verbinden und zu trennen vermögen, wie es die Erkenntniss will oder nothwendig macht. Denn in jeder Wissenschaft ist Doppeltes zu unterscheiden: einmal, dass man den zu erkennenden Gegenstand als solchen erst habe und feststelle, und dann, dass man ihn sofort wirklich erkenne. Das Erstere ist die vorausgehende und unentbehrliche Grundlage aller Wissenschaft. Die zu erkennenden Dinge werden aber durch die Sprache allein in unser Inneres übersetzt, sie werden Objecte der Erkenntniss, einheimisch und eingebürgert in uns, Dinge und Begriffe unserer innern Welt, die wir behandeln und verbinden können, wie wir wollen, zum Guten oder Schlimmen, zur Kenntniss und Wissenschaft, oder aber zur Unkenntniss und Unwissenheit.

Man kann einwenden, dass wir auch durch Wahrnehmen und Denken die Gegenstände als Objecte unsers Innern einführen können. Ja wohl, aber auch durch Schlafen und Träumen; auch die blosse sinnliche Wahrnehmung ist eine Uebersetzung aus dem Buche der Natur in die Erkenntnisswelt unsers Geistes. Diess Alles sind aber nur einzelne Momente, die uns die Objecte des Wissens bringen, die wir dann einführen und wieder entführen lassen können. Sie bringen nur Halbes, Unreifes oder Unhaltbares, und sind in beständiger Bewegung begriffen. Den rechten Halt, den Gehalt eines Ganzen und Bestehenden erlangen sie erst durch die letzte und wichtigste Thätigkeit, dadurch, dass sie als Objecte des Erkennens in Worte zusammengefasst, und sowohl für die Welt unsers Innern, als auch für die ge-

sammte geistige Welt der Menschheit als noch unerkannte aber Erkenntniss fordernde Objecte festgestellt werden. Wir werden daher den gesammten Hergang, wie die Dinge in unser Inneres aufgenommen werden, nach dem letzten und entscheidenden Momente, nach der Sprache, benennen müssen. Erst durch die Sprache erlangen die Objecte die nothwendige Festigkeit, die sie haben müssen, wenn sie uns in der folgenden Thätigkeit des wirklichen Erkennens, wo sie verbunden und getrennt und öfter wiederholt, verbunden und getrennt werden müssen, bestehen und in den verwickeltsten Zusammensetzungen unterscheidbar bleiben sollen. Sonst verschwinden sie unvermerkt in dem Prozesse des Wissens, ein Verschwinden, das eben jede Erkenntniss unmöglich machen würde. Wir müssen gleichsam für sie mit unserm Worte eintreten, damit sie bestehen, und es ist mehr, wenn wir unser Wort geben, als wenn wir blos an sie denken. Wir müssen den Dingen erst unser Wort geben, dann erst können sie bleibende Gegenstände der Erkenntniss werden.

Der Zusammenhang zwischen Sprache und Metaphysik ist also ein wahrhafter und wesentlicher und unzertrennlicher, was vielfach geahnt worden ist; und die Metaphysik kann allerdings als die Grundwissenschaft aller menschlichen Wissenschaften erklärt werden. Wenn wir die verborgene Oekonomie des philosophischen Geistes in allen Zeiten aufmerksam verfolgen, so werden wir immer die Frage, durch welche Mittel die Erkenntniss möglich sei, wie uns überhaupt die Dinge zugänglich werden, als die erste bewegende Ursache aller Wissenschaften kennen lernen. Und vorzugsweise in der neueren Zeit, die sich über alle Metaphysik hinweggesetzt hat. Entkleidet man die neuere Philosophie des Hohen und Prächtigen, was sie hervorgebracht hat, so ist es gerade die verdeckte Frage nach Erkenntniss, wodurch sie am meisten erschüttert worden ist. Würde z. B. *Fichte*, der von diesem Geiste am stärksten ergriffen aber auch am stärksten gebunden war, statt seines un-

behülflichen Mittels von *Ich* und Nicht-*Ich* von *Bild* und *Gegenbild* und *Schranke* überhaupt, das lebendige *Wort* gesetzt haben, durch welches die Dinge unser Eigenthum werden, und durch welches wir sie ganz anders bewahren und beherrschen können, als durch die nicht einmal gebildeten und bestimmten Bilder, die wir immer aufs Neue hervorbringen und tragen müssen, dass sie uns nicht entweichen, so wäre er über den Anfang hinausgekommen, den er in der wahren Wissenschaft machen wollte. Aber so musste er immer von Vorne beginnen, damit ihm der Anfang nicht entwinde. Denn was ist ein bloßes Bild? Was hat es Bleibendes? — So war es denn doch in der That die Metaphysik, welche die Zeit bewegt hat.

Die unvermerkt eingetretene Wendung in der Frage, wie wir zur Erkenntniss der Dinge kommen, zu der Frage, wie wir die zu erkennenden Dinge in die Welt unsers Innern bringen können, ist eine glückliche Wendung in der Wissenschaft. Denn die zweite Frage muss unstreitig zu demselben Resultate führen, wie die erste Frage, aber sie kann diess auf einem viel einfacheren, leichteren und natürlicheren Wege. Denn ist die Aufgabe so gestellt, dass *wir* zu den Dingen selber kommen sollen, so bemächtigt sich unser der Gedanke von etwas Aussergewöhnlichem; wir sollen eine Bahn gehen, die noch gar nicht gemacht ist, und diess verwirrt uns. Wenn aber die Frage so gestellt ist, dass wir die Dinge in uns aufnehmen sollen, so sind wir vorerst unsrer selbst sicher, und wir haben ein leichtes Mittel unserer Aufgabe zu genügen, in dem bekanntesten und unerkanntesten Gute der Sprache. *Pascal* sagt hierüber mit Recht: Nichts ist so allgemein verständlich und verbreitet, als das wahrhaft Gute, die Kunst ist nur, dass man es unterscheiden könne. Es ist gewiss, dass es ganz natürlich und zugänglich sein müsse; wir wissen es nur nicht zu unterscheiden, und diess ist allgemein. Nicht im Ausserordentlichen und Ungewöhnlichen findet sich das wahrhaft Ausgezeichnete, von

welcher Art es auch sein möge. Man will sich erheben, um zu ihm zu gelangen, und dadurch kommt es, dass man sich von ihm entfernt. Man muss den Geist nicht blenden und aufziehen wollen; alles Gespannte und Peinliche bläht ihn auf und lässt ihn leer, statt ihn mit gesunder und kräftiger Kost zu nähren. Vornehmlich ist es der Wahn, dass das wahrhaft Gute schwer zugänglich sei, der die Meisten von dem wahren Wege entfernt, man meint, dass es hoch, sublim und transcendent sein müsse, diess verdirbt Alles. Ich möchte es lieber niedrig, gemeinverständlich, familiär nennen, diess trifft mehr zu. —

Der Umschwung vom objectiven Wege zum subjectiven ist allmählig, gleichsam unwillkürlich und unbemerkt eingetreten. Alle Methode beruht auf der Idee des Zusammenhangs, weil die vielen Wahrheiten einer Wissenschaft in wechselseitige Verbindung und Abhängigkeit gebracht werden sollen, und gerade der Begriff des Zusammenhangs war in der alten Wissenschaft unwirksam und ganz verborgen, und trat erst in der neueren Zeit allbeherrschend auf. Die Wissenschaft hat dadurch den Weg des Lernens betreten und hat gerade in ihrer subjectiven Richtung die grösste Anerkennung und Achtung für die Objectivität der Dinge gezeigt, sie wollte ihren Plan der Erkenntniss, der im Beginne und Anfange nicht anders als unreif und der Grösse und Erhabenheit des Weltplans unangemessen sein konnte, nicht der Wirklichkeit unterlegen, sondern einzig auf sich selbst nehmen, sie wollte jenen Plan erst lernen, und sich in den Jahren des Lernens zur Ebenbürtigkeit mit der wirklichen Welt heranbilden. Wir mögen uns im Denken anstrengen, wie wir wollen, die Welt oder die Thatsachen der Erkenntniss können wir nicht ändern oder umbilden, und sollen es auch nicht; aber uns selbst sollen wir ändern und bilden, unsern Plan der Erkenntniss können wir verbessern, dass er der Wahrheit immer angemessener und zuletzt ganz und gar mit ihr übereinstimmend werde.

Als *Copernicus* zuerst den schwierigen aber bildenden und gewinnreichen Weg des Lernens betrat, und durch seine Theorie des Weltsystems im grossartigsten Beispiele eine Umformung aller Wissenschaften vorbereitete, war es allein die wirksame Idee des Zusammenhanges des Ganzen, die ihn auf den Gedanken bringen konnte, nichts mehr bloss als etwas Einzelnes zu betrachten und zu erklären, sondern umgekehrt, jedes Einzelne als ein Glied eines Ganzen anzusprechen, und diess sogleich mit dem Erhabensten, was wir in der Welt sehen, mit den himmlischen Körpern zu erproben, was über alle Erwartung gelungen ist. Eine Menge von Erscheinungen, die bei der Betrachtung des Einzelnen als für sich Bestehenden, nicht weiter zu erklärende Thatsachen waren, sind als blosse und erklärbare Folgen einer dem Ganzen inwohnenden einfachen Thatsache aufgefunden und im Zusammenhange erklärt worden. In dieser Wissenschaft des Zusammenhanges wird das Einzelne keineswegs übergangen, sondern erst wahrhaft gewürdigt, während ohne den Gedanken des Zusammenhangs Vieles übergangen und Einzelnes zwar angelastet, aber nicht verstanden wird, weil die Reihe des Einzelnen ohne die verbindende Idee des Zusammenhanges in's Unendliche gehen müsste.

Diese Idee hat nach und nach die Wissenschaften der Experimente geschaffen, die das Einzelne als ein Glied des Ganzen ansehen und in Rücksicht auf das Ganze untersuchen, und gerade durch das unscheinbar Kleinste das Grosse und Allgemeine zu erkennen lehren, eine Wissenschaft, die dem Alterthume gänzlich unbekannt war. Man vergleiche nur den höchsten Ausdruck der Philosophie, zu welchem es das Alterthum in Aristoteles gebracht hat, mit den einfachsten und leichtesten Resultaten der neuern naturhistorischen Wissenschaften. — In der Metaphysik sucht Aristoteles zu erklären, wie die Erkenntniss des Sinnlichen und Uebersinnlichen überhaupt möglich sei, und gelangt zu dem Resultate, dass die gesuchte

Erkenntniss auf dem Wege der erfahrbaren Dinge nicht gefunden werde, weil diese in's Unendliche gehen und jeder Wissenschaft entfliehen. „Denn diess geht in's Unendliche und Unbestimmte“, ist der stehende Ausdruck seiner Philosophie; und da auch die Ideen nicht für sich existiren, und daher, wenn sie gelten sollen, erst aus den unendlich vielen einzelnen Dingen herausgelesen werden müssen, was aber ihrer Unendlichkeit wegen unmöglich ist, so ist die wahre und gesuchte Wissenschaft auch nicht aus den Ideen zu gewinnen.

Die neuere Naturwissenschaft hebt diess trostlose Wort: „denn diess geht ins Unendliche und Unbestimmte“ entschieden und einleuchtend auf, sie zeigt, dass es bloss Vorurtheil und Irrthum sei, zu denken, dass das Erfahrbare in's Unendliche und Unbestimmte gehe; sie versucht es, diess Unendliche und Unbestimmte zu überblicken, sie findet und erklärt überall Endlichkeit und Bestimmtheit, und hat durch die Idee des Zusammenhanges eine Ordnung von *zählbaren* Arten, Geschlechtern, Familien und Formationen gefunden, die sie sämmtlich bestimmen und als die festeste Grundlage der Gedanken hinstellen kann. Denn wo einmal auch nur *ein* wissenschaftlich Unterscheidbares und Zählbares gegeben, wo der Weg der Ordnung nur betreten ist, da müssen sich im Verlaufe der Forschung alle ferneren Bestimmtheiten anreihen, so viele ihrer auch sein mögen.

Die Idee des Zusammenhanges ist am Anfange durchaus subjectiv, und erst, wenn wir den Zusammenhang in uns selbst, in der Welt unsers Innern erkannt haben, wird unser Denken gewaffnet genug sein, dass wir ihn auch in der allgemeinen und wirklichen Welt erkennen mögen. All unser Denken geschieht durch unsre Begriffe, es ist ein Vorgang in uns selber, alle Methode ist subjectiv und in uns selbst durchzuführen, nicht objectiv in den Dingen, gleichsam als ob sie statt unsrer die Mühe des Denkens übernehmen wollten. Bequem wäre diess allerdings, wenn wir es nur so bequem haben könnten

Wenn z. B. in einer solchen objectiven Methode gesagt wird, dass die Quantität in die Qualität umschlage, oder dass sich die Idee zur Natur entäussere, so sieht es aus, als ob ein Geschichtschreiber erzählte, nicht aber als ob ein Philosoph bewiese. Glaubt man denn wohl im Ernste, dass die Natur selbst vor den Augen des Philosophen und seiner Zuhörer auf- trete und ihre Verwandlungen vornehme, dass der Philosoph, wie der Physiker etwa auf den Magnet, nur auf sie hinweisen und sagen dürfe: Seht, diess geschieht. Wie würden sie erschrecken, wenn sie selbst aufträte die Natur? Aber es ist andrer Art, und lange nicht so schrecklich. Nicht die Idee entäussert sich zur Natur, sondern der Begriff der Idee, welcher als Wort den Andern mitgetheilt wird, wird von dem Philosophen mit dem Begriffe der Entäusserung zur Natur verbunden. Dieser Vorgang der Verbindung ist vorerst nur im Innern und im Denken. Die Sprache aber kömmt höchst gelegen, denn da sie ihrem Wesen nach geschichtlich ist, so sind ihre Worte eben sowohl Zeichen des Gegenstandes, als Zeichen des Begriffs dieses Gegenstandes. So bezeichnet das Wort *Gott* ebensowohl den Begriff Gottes als auch Gott selbst, und wenn im Denken nicht auf's Schärfste unterschieden wird, dass die Worte ursprünglich die Begriffe, die in unser Inneres übersetzten Gegenstände als Objecte möglicher Erkenntniss, bezeichnen, so muss Verwechslung und Verwirrung eintreten, ja selbst Diejenigen, die an einen Gott glauben, werden zuletzt sagen: Gott ist ein transcenderter Begriff, während sie in Wahrheit sagen wollen, dass der Begriff Gottes transcendent sei. Solche Redensarten sind durch *Kant* in Umlauf gebracht worden.

Dabei gewinnt man freilich einige Vortheile, die aber eben so viele Nachtheile für die Wissenschaft selbst sind. Man erlangt den Schein, als ob man die Dinge selbst beherrschen könne, wie man wolle, oder dass sie dienen, wie man herrschen wolle, und dann wälzt man die Last der Beweise von

sich ab und schiebt sie den Dingen zu; diese werden so unterthänig sein und thun, was wir wollen, oder Gott wird schon dafür sorgen, dass es so sei, wie wir sagen.

Wenn der Philosoph erklärt: ich verbinde mit dem Begriffe der Idee den Begriff der Entäusserung zur Natur, so werden wir antworten: Gut, gieb uns einen Beweis und zeige uns, wie es dabei zugehe. Sagt er aber: die Idee entäussert sich zur Natur, so hat es den Schein, als ob die Idee selbst den Beweis geliefert habe, denn er kann uns Pflanzen, Thiere und Steine und andere Entäusserungen der Natur zeigen. Seht, diess ist die Entäusserung der Natur, wird er sagen, wenn Ihr nicht blind seid, so müsst Ihr sie sehen, also glaubt nur! Allein diess hatten wir schon früher gesehen, nicht aber die gelehrte *Verbindung* der Idee und der Entäusserung zur Natur, und eben, weil wir das Eine schon früher gesehen hatten, sind wir gekommen, um auch das Andere und die Verbindung beider kennen zu lernen. So aber sind wir um diese Erkenntniss auf's Schönste gebracht worden, und wir wissen nicht einmal recht, wie es dabei zugegangen sei. — Diess ist die objective Methode, die jedoch das Subjectivste und Willkührlichste ist, das sich denken lässt. Wenn uns aber die Wissenschaft selbst am Herzen liegt, so nehmen wir für objectiv, was objectiv ist, und für subjectiv, was subjectiv ist; wir nehmen freiwillig die Last der Beweise auf uns, und wir werden nimmermehr so leichtsinnig sein, sie von uns abzuwälzen und den Dingen zuzuschieben, wenn uns etwa die Beweise nicht gelingen wollen. Was wir freiwillig auf uns genommen haben, das müssen wir tragen. So wenig ein Anderer für uns denken kann, indem wir selber denken müssen, wenn wir Erkenntniss haben wollen, eben so wenig dürfen wir uns der Täuschung hingeben, dass die Gegenstände selbst für uns die wissenschaftlichen Beweise liefern können. Wir müssen selbst beweisen und die rechte Verbindung der Begriffe herstellen, und dann erst werden wir zu erkennen im Stande sein, ob die

Wissenschaft eine wahre sei, ob die übersetzten Begriffe unsers Innern so verbunden seien, wie die Gegenstände selbst verbunden sind. Wir erkennen diess aber anfangs nicht an den Gegenständen, sondern aus unsern Beweisen; denn die Gegenstände sind anfangs nur die Probleme und Aufgaben, die unserm Denken gestellt sind.

Es ist ganz klar, dass wir nur durch unsre Begriffe denken und die Reihe ihrer Verbindungen herstellen. Diess ist die erste wissenschaftliche Weihe, dass man einsehe und erkenne, dass die Wissenschaft etwas durchaus Inneres, ein Denken mit unsern Begriffen und durch unsre Thätigkeit sei. Nur der Uneingeweihte kann wähnen, dass er mit den Dingen selbst denke, dass er den Weg der Gegenstände gehe, und dass alles, was er finde, ein Resultat der Dinge sei, und dass sich der Prozess des Wissens gleichsam von selbst mache. Dem ist lange nicht so.

Wenn wir aus dem Herzen der Menschen reden wollen, so besteht Erkenntniss in nichts Anderem, als dass wir die zu erkennenden Dinge als Begriffe in uns bringen und feststellen, dass wir dann ganz frei mit unsern Begriffen denken, nach unsern Gesetzen [und a priori, unabhängig von dem jedesmaligen Rückblicke auf die Dinge, mit Nothwendigkeit; und dass wir endlich die auf diese Art einzig und allein durch uns gewonnenen Resultate wieder interpretiren und dennoch die Dinge selbst auslegen, wobei es freilich der fromme Wunsch unsers Herzens bleibt, dass die durch uns bewerkstelligten Verbindungen und Trennungen unsrer Begriffe, dass unsere Erkenntnisse ganz und gar auch die Verbindungen und Trennungen, die Resultate und Wahrheiten der Dinge selber seien. Und diess soll nicht ein blosser frommer Wunsch bleiben, sondern es muss als die wichtigste Forderung an die Wissenschaft gestellt werden, dass sie dieser Aufgabe genügen könne. Gelänge diess nicht, so bliebe all unser Denken inhaltsleer, ein Spiel mit selbstgeschaffenen Begriffen oder ein selbstgeschaffenes Spiel mit wah-

ren Begriffen, und die wahre angestrebte Wissenschaft müsste als unmöglich und unerreichbar erkannt werden.

Es wird gesagt, dass die Metaphysik die Wesenheit der Dinge zu erkennen habe. Ja wohl; aber die Wesenheit der Dinge ist, dass sie erkennbar seien, und erkennbar werden sie erst durch ihre Aufnahme in unser Denken. So hat Metaphysik die Erkenntniss der Wesenheit der Dinge anzubahnen. Sie wird eben so sehr einem falschen Idealismus, wie einem falschen Realismus zu begegnen haben. Der falsche Idealismus besteht darin, dass man die Uebersetzung und nachfolgende Interpretation vergisst, und einzig bei dem innern Hergange des Denkens selbst stehen bleibt. Der falsche Realismus besteht darin, dass man Uebersetzung und Interpretation übersieht, und noch dazu den innern Hergang des Denkens nicht kennt, sondern alle von uns hergestellten Verbindungen als Resultate der Dinge selbst hinnimmt.

Allerdings müssen unsre Verbindungen mit den Resultaten der Dinge übereinstimmen, wenn wahre Wissenschaft bestehen soll, aber das ist es eben, was das Bedürfniss nach Wissenschaft hervorgerufen hat, dass die Verbindungen der Dinge selbst nicht ursprünglich erkannt werden können, dass wir in uns Verbindungen herstellen, und dass wir uns im Denken üben müssen, um mit gewaffnetem Geiste, nachdem wir schon Zusammensetzungen in uns zu erkennen und zu analysiren gelernt haben, jetzt mit der Reife des Denkens zu den Dingen selbst zu kommen, und nun wirkliche Verbindungen und Wahrheiten wahrzunehmen, die wir anfangs nicht erfassen konnten, weil uns alle nothwendigen Anhaltspunkte dazu gefehlt hatten. Diese Anhaltspunkte sind die unterscheidbaren Elemente der Verbindungen; aber eben, dass man sie unterscheiden lerne, ist die erste und wichtigste Aufgabe; und kann man sie unterscheiden, indem man in sich selber Ver-

bindungen gebildet hat, dann erst bemerkt man auch diese Elemente in den Dingen selbst, und eben um diess zu lernen, müssen wir von ihnen weg in das eigene Innere einkehren.

Viele Wissenschaften sind noch in diesem ersten metaphysischen Zustande der Namengebung und Aufnahme ihres Gebietes in die Erkenntniss. Es ist nicht der letzte Zustand der Vollkommenheit, aber der wichtigste Zustand des Anfangs. Denn ist die Aufnahme und Uebertragung der Dinge in die Erkenntniss richtig und gelungen, so wird man in der nachfolgenden Systematik, welche die aufgenommenen Begriffe verbindet und Erkenntnisse wirklich hervorbringt, mit richtigen Begriffen denken und erkennen können. Und wie der Zustand der Uebersetzung war, so wird dann endlich die Interpretation der gewonnenen Erkenntnisse sein, die Auslegung der Dinge selber, wo sie nicht mehr als bestimmte, aber ungelöste Aufgaben, sondern als erkannte Thatsachen erklärt werden. — Davon wird die Möglichkeit einer wahren und wesenhaften Erkenntniss abhängen, dass die Dinge aus dem Reiche ihres Seins in das Reich unsers Seins richtig und genau übersetzt werden können. Jedenfalls ist es zu versuchen. Gelingt diese Uebersetzung, so ist Alles in unsre Hand gegeben, die Erkenntnisse können allein durch unsere Thätigkeit und nach der Nothwendigkeit des consequenten Denkens gewonnen werden, und die endliche Interpretation wird der anfänglichen Uebersetzung entsprechen. Werden anfangs die Begriffe richtig übersetzt, und ist das Denken richtig, wahr und nothwendig, so wird die Interpretation auch richtige, wahre und nothwendige Thatsachen geben müssen.

Die Aufnahme der Begriffe ist also das Erste und Wichtigste, der Grund, auf welchem alles Nachfolgende ruhen wird. Wie diese Aufnahme geschehen könne, diess soll gezeigt werden. Die Mathematik können wir nicht als Beispiel wählen, denn das ist nicht die stärkste Seite an ihr, der Anfang. Der Fortgang aber, die Methode der Beweise, ist aufs Höchste in ihr ausge-

bildet. Im Anfange hat sie keinen Anhaltspunkt in der Metaphysik, und so die Metaphysik fehlt, empfinden es alle Wissenschaften. Will aber eine einzelne Wissenschaft die Aufgabe der Metaphysik selbst auf sich nehmen, alle ihre Regeln und die ganze Oekonomie der Aufnahme ihres Gebietes selbst ausführen, so kann diess nicht als blosser Einleitung und gleichsam im Fluge geschehen; will sie dabei verweilen, so wird sie selbst Metaphysik, will sie aber zu ihren eigenthümlichen Aufgaben kommen, was wesentlicher und nothwendiger ist, so sucht sie eben über den Anfang hinwegzukommen, wie es gerade gehen mag, was jedesmal einen peinlichen Eindruck der Schwäche ihres Anfangs hervorbringt. Mitten in den Beweisen der Mathematik da ist Leichtigkeit, Schönheit, Beweglichkeit, da verweilt man gerne, aber im Anfange ist Unbeweglichkeit, und es zeigt sich hier so recht, dass aller Anfang schwer sei. Man wird es nicht ändern können, wenn nicht die Metaphysik eintritt, und ihre Aufgaben löst.

Aber andere Wissenschaften, die noch bei dem Anfange der metaphysischen Fragen verweilen, und nicht zu den Beweisen vordringen, können als Beispiele gewählt werden. In den Naturwissenschaften ist es gelungen. Während Logik und Metaphysik stille standen, hat der logische und metaphysische Geist in den Naturwissenschaften gewirkt, und grosse, erfolgreiche logische und metaphysische Lehren geschaffen, die der wissenschaftlichen Logik und Metaphysik gänzlich unbekannt geblieben waren. In ihnen kann man lernen. Da sieht man ein, wie der Metaphysik in den Naturwissenschaften Aufgaben gelungen sind, die in den abstracten Lehren als unübersteigliche Hindernisse erschienen waren, wie ganze, grosse Gebiete sprachlich aufgenommen, benannt, geordnet und der Erkenntniss zugänglich gemacht worden sind.

Wir werden, den Weg der Natur betretend, die Schwierigkeiten der Erkenntniss aufnehmen, wie sie sind, und auch trennen, wie sie getrennt werden können. Wir werden der Er-

fahrung nicht ausweichen, etwa aus dem Vorwande, dass sie Unendliches und Unbestimmtes gebe. Diess wird nur ein Vorurtheil sein; denn die Sprache erstreckt sich auf alles Erfahrbare, und ist doch endlich und in sich geschlossen. Und was auf keine Weise erfahren werden könnte, würde auch auf keine Weise Gegenstand der Wissenschaft werden können. Denn wie sollte es an uns herankommen, wie sollte es durch Denken bestimmt werden, wenn es nicht aus der Erfahrung in's Denken übersetzt werden könnte? Und wenn die Erfahrung wirklich nur Einzelnes und Zerstreutes giebt, wie ohne alle Beweise angenommen wird, so wird es nur eine Erkenntniss von Einzelem und Zerstreutem geben, und wenn dennoch behauptet wird, dass es auch eine Erkenntniss des Allgemeinen und Nothwendigen gebe, so wird auch die Erfahrung Allgemeines und Nothwendiges geben müssen. Das Allgemeine wird nur vielleicht anfangs nicht wahrnehmbar sein, und die Wissenschaft wird darum eintreten müssen, dass wir in den Stand gesetzt werden, auch in der Erfahrung Allgemeines und Nothwendiges wahrzunehmen. Denn nimmermehr könnte in die Erfahrung das hineingelegt werden, was nicht wahrhaft, wenn auch anfangs verdeckt, in ihr enthalten wäre. Und die endliche Interpretation in die Erfahrung wird jedesmal der anfänglichen Uebersetzung aus der Erfahrung entsprechen müssen.

Der Weg der Natur besteht darin, dass Alles in der rechten Ordnung aufgenommen und dass jede Schwierigkeit so getrennt werde, wie sie getrennt werden kann. Die Erkenntniss ist aber eine Schwierigkeit, sie ist die Schwierigkeit der Wissenschaft selbst. Wir trennen sie daher in die vorausgehende *Bestimmung*, in die Aufnahme der Objecte des Denkens, und in die nachfolgende *Erkenntniss* der Objecte des Denkens.

Es ist ein mächtiger Unterschied zwischen der *Bestimmtheit* der Probleme und zwischen der *Erkenntniss*, d. h. *Lösung* der Probleme. Und dieser Unterschied muss hervorgehoben und festgehalten werden. Wird er übersehen, so wird mit der Thüre

in das Haus gefallen und der Eingang versperrt. Bestimmtheit und Erkenntniss sind zwei ganz verschiedene Momente der Wissenschaft; das Erste wird durch die *Sprache*, das Letzte wird durch die *Beweise* gegeben. Die Sprache muss Sprache bleiben, und nicht Erkenntniss werden, und die Erkenntniss muss Erkenntniss bleiben, und nicht Sprache werden.

Aus dem Wesen der Sprache geht hervor, dass die Worte oder Zeichen im Allgemeinen niemals unmittelbare Zeichen des Gegenstandes selbst, sondern Zeichen der Wahrnehmungen, Empfindungen oder Gedanken über diesen Gegenstand seien, und dass sie erst mittelbar Zeichen des Gegenstandes selbst werden können und müssen, wenn die Sprache vollkommen sein soll. So ist das Wort *Sonne* unmittelbar nur ein Zeichen der Wahrnehmung der Sonne; wir erinnern uns bei diesem Worte an dasjenige, was die Sonne bewirkt, oder vielmehr was wir als ihre Wirkungen wahrgenommen haben, es mögen nun diese Wahrnehmungen die Verbindungen aller oder nur einiger Wirkungen der Sonne sein. Alle, welche die nämliche Sprache sprechen, vergegenwärtigen sich bei dem Worte *Sonne* nur diejenigen Zeichen, die sie als Wirkungen der Sonne wahrgenommen haben, und es ist ein blosses Vorurtheil, wenn man glaubt, dass man Denjenigen, die eine Sprache verstehen, erst erklären müsse, an welches unerkannte, aber doch bestimmte Object sie denken sollen, wenn das Wort *Sonne* ausgesprochen wird. Diess wissen sie schon aus der Sprache selbst.

Ist aber eine Sprache vollkommen und der Gegenstand vollkommen erkannt, und diese Erkenntniss Allen gemeinschaftlich, so vergegenwärtigen sich Alle bei dem Worte *Sonne* die nämlichen Wirkungen oder vielmehr die nämlichen Wahrnehmungen derselben Wirkungen. Ist der Gegenstand nicht vollkommen erkannt, was in der Sprache allein niemals der Fall sein kann, so können sich Verschiedene verschiedenes, d. h. verschiedene Wahrnehmungen bei demselben Gegenstande vergegenwärtigen, die sie aber doch alle auf dasselbe unerkannte

Object *Sonne*, als Quelle dieser Wahrnehmungen beziehen, in der Art, dass sie, obgleich das Object unerkant ist, dasselbe doch niemals mit einem andern Objecte verwechseln, sondern durch dasselbe Wort *Sonne* dasselbe unerkante Object meinen und festhalten, obgleich sich der Eine diese, der Andere andere Wahrnehmungen, die sie bei demselben Objecte haben, vergegenwärtigen können. Sind also auch die Wahrnehmungen verschieden, so wird doch derselbe Gegenstand als die eine und nämliche Quelle dieser Wahrnehmungen gemeint. Da einmal an demselben Objecte festgehalten wird, so kann auch von ihm allgemein gesprochen werden, und es wird möglich sein, die verschiedenen Wahrnehmungen desselben Objects zu berichtigen und zu ergänzen, und eine Wissenschaft von ihm herzustellen.

Wäre diess nicht der Fall, dass wir durch dasselbe Zeichen oder Wort denselben *noch unerkanten* Gegenstand als Object der Untersuchung festhielten, so würde niemals eine Wissenschaft möglich werden, weil wir dann schon die Erkenntniss vor allem Hergange der Erkenntniss besitzen und vor allem Denken allwissend sein, oder aber auf alle Erkenntniss und Verständigung verzichten müssten.

Es ist daher die erste Aufgabe und zugleich die erste Thatsache der Sprache, *dass wir bei demselben Worte denselben unerkanten Gegenstand festhalten*, und dass wir an dasselbe (unerkante oder erkannte) Object denken, so oft dasselbe Wort ausgesprochen wird, und dass diess auch bei Allen der Fall sei, welche dieselbe Sprache reden und verstehen. Sind aber durch misslungene Versuche Worte in eine Sprache eingeführt worden, bei denen Niemand an ein bestimmtes Object denkt, so ist diess eine Schuld jener Versuche, nicht ein Mangel der Sprache, es ist eine Unbild, die der Sprache widerfahren ist, es ist nicht in ihrem Wesen gegründet, sie muss es abschütteln, und sie kann durch vollkommene Erkenntniss wieder in ihrer Reinheit hergestellt werden. Die Bestimmung und Feststellung

des Objects, diese Mittelstufe zwischen Wissen und Nichtwissen füllt die Sprache aus, und wird dadurch die erste Stufe jeder Wissenschaft selbst.

Wir haben bemerkt, dass die Zeichen der Sprache nicht unmittelbare Zeichen des Gegenstandes selbst, sondern Zeichen unserer Wahrnehmungen seien. Unmittelbare Zeichen der Sonne sind z. B. Erwärmung und Erleuchtung, aber das *Wort Sonne* erwärmt und erleuchtet nicht, es ist nur ein Zeichen der Empfindungen oder Wahrnehmungen, die in uns die unmittelbaren Zeichen und Wirkungen der Sonne hervorgebracht haben. Unmittelbare Zeichen der Sonne sind auch die Empfindungen und Wahrnehmungen, welche die Sonne in uns hervorgerufen hat oder hervorruft, das *Wort Sonne* ist aber nur ein Zeichen dieser unmittelbaren Zeichen, und mittelbar ein Zeichen des Gegenstandes selbst, daher es auch die Macht hat, dasselbe Object in verschiedenen Zeiten und für Verschiedene festzuhalten und vor Verwechslung mit andern Objecten zu bewahren.

Es könnte mangelhaft erscheinen, dass die Worte der Sprache Anfangs nur die Zeichen unerkannter Gegenstände seien. Dieser Schein der Mangelhaftigkeit kann aber nur daher kommen, dass Sprache und Wissenschaft miteinander verwechselt werden. In der Wissenschaft ist es ein Mangel an Einsicht, die Gegenstände nicht zu erkennen, deren Worte man weiss, aber in der Sprache ist diess kein Mangel, sondern eine Vollkommenheit, wie bewiesen werden wird, so befremdend diess auch auf den ersten Blicke scheinen möge.

Dass man am Anfange einer Wissenschaft nur unerkannte Gegenstände habe, ist klar; denn wären die Gegenstände schon erkannt, so wäre jede fernere Wissenschaft überflüssig. So aber ist man genöthigt, die Gegenstände zu untersuchen, ohne irgend ein anderes Hilfsmittel zu haben, als bestimmte Worte dieser unerkannten Gegenstände. Man hat jedoch in diesen Worten eine Feststellung desselben Objects, das in allen Theilen der Untersuchung festgehalten wird, und in Verbindungen

mit andern Objecten (Verbindungen, die nur durch das Festhalten derselben Objecte möglich gemacht werden), endlich seine Natur offenbart und zur Erkenntniss erhoben wird. Könnte man am Anfange auch gar nichts bestimmen, so ist doch diess gegeben, dass der zu erkennende Gegenstand zwar unerkant, aber bestimmt sei. Nun gut; man halte fest an diesem Uerkannten aber Bestimmten, und man wird gerade an diesem die ersten Anhaltspunkte der Forschung haben. —

Fassen wir die Resultate dieser Untersuchung zusammen, so haben wir vor Allem den Vortheil erlangt, dass wir einen Ausgang aus den Irrwegen der Sophistereien gefunden haben. Wenn z. B. gesagt wird, die vollkommene Wissenschaft bestehe darin, dass Alles definirt werde; aber es sei unmöglich, dass Alles definirt werde, da die ersten zu definirenden Worte nothwendigerweise undefinirte Worte voraussetzten, die zu ihrer Definition dienen könnten, und daher sei es auch unmöglich, dass die vollkommene Wissenschaft jemals von Menschen erreicht werde, so antworten wir: diess ist Alles ganz richtig, *wenn es keine Sprache giebt*. Wir sagen sogar dasselbe, dass die wahre Wissenschaft nicht möglich sein würde, wenn es keine Sprache gäbe, aber wir nehmen es in einem andern Sinne. Wir begehen nicht den Fehler, dass wir die Sprache übersehen, als ob sie gar nicht vorhanden wäre, sondern wir richten unsre Aufmerksamkeit auf sie, und erkennen in ihr das Hülfsmittel, das die wahre Wissenschaft erst möglich macht. Freilich, wenn es so angeordnet wäre, dass in *einem* Zuge Sprache und Erkenntniss zugleich gewonnen und gelehrt werden müssten, so würde das Eine Schaden leiden, und diess Eine wäre unstreitig die Erkenntniss selbst. Aber es ist ja nicht so angeordnet; man wage es nur, einmal frei aufzublicken, die Sprache ist bereits vorhanden, und zwar *vor* der Erkenntniss; sie leistet wirklich Alles, was für die Erkenntniss gefordert wird, nämlich dass sie die Gegenstände in ihrer Ganzheit und Bestimm-

heit, als Gegenstände der Erkenntniss, feststellt. Was von der Definition vergeblich verlangt wird, das hat die Sprache wirklich schon geleistet. Sie hält die Gegenstände fest, dass sie nicht mit andern Gegenständen verwechselt werden können; und wenn dasselbe auch von der Definition verlangt wird, so wird die Definition eine neue Sprache, eine Kunstsprache sein, die ihre Aufgabe nur auf dieselbe Art erfüllen wird, wie sie die natürliche Sprache erfüllt hat und erfüllen lehrt. So wird kein Gegenstand in seiner Ganzheit, Ungetrenntheit und Unerkanntheit definirt zu werden brauchen, denn als solchen hat ihn die Sprache bereits festgestellt.

Aber jeder künstlich geschaffene Gegenstand der Erkenntniss wird definirt werden müssen. Nennen wir die Gegenstände als sprachlich feststehende, aber noch unerkannte Objecte des Denkens, Gegenstände in ihrer Ganzheit und Integrität, so werden alle Objecte des Denkens definirt werden müssen, die, durch das Denken auf eine bestimmte Art verbunden, aus ihrer Ganzheit und Einheit herausgenommen, in ihrer Integrität verändert worden sind. Oder vielmehr: nachdem die Gegenstände durch das Denken auf eine bestimmte Art verbunden, nachdem Verbindungen durch Denken hergestellt sind, welche die Gegenstände nicht mehr in ihrer Ganzheit und Getrenntheit von andern Gegenständen der Erkenntniss lassen, dann muss diesen künstlichen Verbindungen ein bestimmtes Wort gegeben, und die Bestimmtheit desselben aus dem Hergange der Verbindung selbst festgestellt werden. Z. B. ganze Zahlen, die durch 2 theilbar sind, werden *gerade* Zahlen genannt. So ist in bestimmter Verbindung der Begriff der geraden Zahl definirt. Immer aber muss die bestimmte Verbindung selbst der Namengebung vorausgehen; man muss zuerst etwas bestimmt gedacht haben, ehe man im Stande sein wird, es festzustellen und zu benennen. Benannt aber muss es werden, damit man ein einziges Wort statt vieler Worte habe, und damit der Hergang des Denkens einfacher und kürzer gemacht werde. Erklärt aber muss

dieser Name werden, weil er ursprünglich nur ein Eigenthum eines Einzigen ist, desjenigen, der zuerst diese künstliche Verbindung hergestellt hat. Diese Verbindung, für die er diesen Namen gewählt hat, muss er offenbaren, damit sie auch die Andern lernen können, denn in der Wissenschaft soll nicht errathen, sondern gelehrt und gelernt werden. Aber die Gegenstände in ihrer Integrität sind nicht Eigenthum eines Einzigen, sie sind Eigenthum Aller durch die Gemeinschaft der Sprache, sie haben also auch nicht nöthig, dass sie ein Einziger den Uebrigen zum Eigenthume gebe; man würde diese Gabe als eine falsche Definition zurückweisen müssen. — Aber man muss doch in Worten definiren, kann man einwenden. Ja wohl, in natürlichen Worten der Sprache, und diese sind Allen bekannt. Es werden zwei oder mehrere unveränderte Gegenstände verbunden, und es wird daraus eine neue, künstliche Verbindung hergestellt. Das Letztere, die veränderte und künstliche Verbindung ist künstlich zu benennen; sie wird definirt aus den Worten der *unveränderten, also bekannten Gegenstände*. Im Verlaufe der Wissenschaft können aber und müssen bereits definirte Verbindungen an die Stelle der noch unveränderten Gegenstände treten; dann wird durch sie definirt. Aber sie sind schon durch frühere Definitionen bekannt, und die frühesten sind durch die Gegenstände in ihrer Ganzheit, durch die Worte der Sprache selbst bekannt und gegeben.

Ferner haben wir in unsrer Untersuchung die Ueberzeugung gewonnen, dass wir eine geheiligte Vorschrift der Logik übertreten müssen, wenn wir in das Innere der Wissenschaft selber eintreten wollen. Diese geheiligte Vorschrift besteht darin, dass man im Beweise eines Satzes nur durchaus Erkanntes, Sicheres und Bewiesenes anwenden dürfe; Da man aber am Anfange noch nichts erkannt hat, so wird es schwer sein, mit dieser Vorschrift zur Wissenschaft zu gelangen. Sie fordert wirklich die Kunst, dass man schwimmen lerne, ohne dass man ins Wasser gehe.

Wir bescheiden uns also zu der Erkenntniss, dass man auch Unerkanntes, wenn gleich nicht Unbestimmtes in den Beweisen haben und anwenden dürfe und müsse.

Wäre diess ein Mangel, dass man unbekannte und unerkannte Gegenstände in bestimmten Zeichen und Worten habe, und mit diesen Zeichen unerkannter Gegenstände verfare, als wären sie bestimmte Zeichen erkannter Gegenstände, so müsste z.B. die mathematische Analysis, welche die resultatenreichste aller Wissenschaften ist, in der That die mangelhafteste unter allen sein. Denn sie rechnet durchaus mit bestimmten Zeichen unerkannter Gegenstände, die sie eben durch Rechnung finden und erkennen will. Ihr Erfolg ist ein glänzender Beweis, dass sie unbeirrt durch gänzlich grundlose Behauptungen, wie da sind, dass man nur durchaus Erkanntes in den Beweisen gebrauchen solle, dass man Alles definiren müsse u. s. w., den einfachen Weg der Natur betreten habe, einen Weg, der uns schon durch dasjenige, was das Allgemeinste unter Allem ist, nämlich durch die Sprache von der Natur vorgezeichnet wurde, nur dass er unbeachtet geblieben war.

Wir wollen eine Darstellung dieses analytischen Verfahrens in folgendem höchst einfachen Beispiele geben. Es werde Jemand abgeschickt und lege in drei Stunden einen Weg von zwei Meilen zurück. Nach zwei Stunden werde ein Anderer abgeschickt, der in vier Stunden drei Meilen zurücklegt. Wann wird er den Ersten einholen? — Die Analysis verfährt auf folgende Art: der Weg, den beide zurücklegen, ist derselbe (obgleich es noch unbekannt ist, wie gross er sei, was auf die gesuchte Erkenntniss keinen Einfluss hat). Die Anzahl der Stunden ist unbekannt; diess muss bestimmt werden, weil es auf die gesuchte Erkenntniss Einfluss hat. Ist die Anzahl der Stunden für den Zweiten gleich x , so ist sie für den Ersten gleich $x + 2$, weil er zwei Stunden früher seinen Weg begonnen hat. Die noch unerkannten Grössen, x und $x + 2$, sind durch die Zeichen bestimmt, und diese

erste Bestimmtheit bewirkt, dass die unerkannten Grössen während der Untersuchung nicht mit andern Grössen verwechselt werden. Der Erste legt in einer Stunde $\frac{2}{3}$ Meilen zurück, also in $(x+2)$ Stunden $\frac{2}{3} \times (x+2)$. Diess ist der vom Ersten zurückgelegte Weg. Der Zweite legt in einer Stunde $\frac{3}{4}$ Meilen zurück, also in x Stunden $\frac{3}{4} x$ Meilen, und diess ist der vom Zweiten zurückgelegte Weg. Der Weg des Ersten und des Zweiten sind einander gleich, es ist daher in der Zeichensprache der Analysis:

$$\frac{2}{3} (x + 2) = \frac{3}{4} x.$$

Daraus folgt, durch einfache Rechnung, dass

$$\frac{2x + 4}{3} = \frac{3}{4} x; 8x + 16 = 9x; x = 16.$$

Es wird daher nach 16 Stunden der Erste vom Zweiten eingeholt werden. Und nun kann man auch finden, wie viele Meilen Jeder zurückgelegt haben wird. Der Zweite wird 16 Stunden gegangen sein, und da er in jeder Stunde $\frac{3}{4}$ Meilen zurücklegt, so wird er 12 Meilen zurückgelegt haben. Der Erste wird 18 Stunden gegangen sein, und da er in jeder Stunde $\frac{2}{3}$ Meilen zurücklegt, so wird er auch 12 Meilen zurückgelegt haben, in dem Augenblicke, wo ihn der Zweite eingeholt hat.

Das Verfahren, durch welches Alles gelingt, besteht darin, dass für *unerkannte* Objecte *bestimmte*, nicht verwechselbare, Zeichen oder Worte gesetzt werden. Setzen wir nun den Fall, Jemand träte auf und sagte: Diess geht nicht an, man muss sogleich den Gegenstand erkennen und bezeichnen. Nun gut. Er möge es thun. Er sage also z. B.: in 8 Stunden wird der Zweite den Ersten einholen. Das Wort: 8 Stunden, ist allerdings etwas Erkanntes; aber wird er es durch diese Erkenntniss getroffen haben? Nein, und darum schliesst er, dass man überhaupt nichts erkennen könne. Auf seinem Wege allerdings nicht, und unsern will er nicht betreten. Aber wir halten ihn fest. Was hat ihn berechtigt, sogleich eine erkannte Zahl, 8 Stunden zu setzen, und dadurch die Wahrheit zu verändern?

Darf man mit der Wahrheit umgehen, wie man will? Keineswegs. Gerade damit sie in ihrer Integrität erhalten werde, darf man anfangs für sie nicht etwas Erkanntes setzen, sondern etwas Unerkanntes, dann ist sie noch ganz und unerkannt dasselbe, was sie als erkannte Grösse sein wird, aber diess Unerkannte muss man in bestimmten Zeichen festhalten, damit man endlich die Wahrheit finden könne. Gerade durch Zeichen, welche unerkannte Gegenstände bezeichnen, wie die Worte und Zeichen einer Sprache, wird die Wirklichkeit und Integrität des Gegenstandes bewahrt; wollten wir sie aber durch die Worte sogleich erkennen, so würden wir die Wirklichkeit und Wahrheit der Dinge nach unserer ersten Willkühr und Laune verändern, und nicht die wirklichen Gegenstände, sondern Wahngebilde untersuchen, und dennoch glauben, dass wir es mit den wirklichen Dingen zu thun hätten.

Man kann auch unmöglich in den Beweisen auf ein Nichts kommen — und bloss klare Worte und Sätze, hinter denen man nichts weiter zu suchen hätte, unterscheiden sich wenig von einem Nichts — sondern wenn die Wahrheiten wesentlich sind, so werden wir immer auf Thatsachen kommen müssen. Immer ist etwas durch etwas Anderes zu erkennen und zu erklären, und in dem Erkannten wird immer das noch enthalten sein, durch was es erkannt worden ist. Gesetzt, man habe eine krumme und durch Linien begrenzte Oberfläche. Ihr Flächeninhalt soll erkannt werden. Es wird ein beliebiges Quadrat, als die einfachste ebene Figur, als Maass genommen, und es soll nun erkannt werden, wie oftmal dieses Quadrat in der zu messenden Fläche enthalten sei. Die Schwierigkeit dabei ist nun, dass man nur das Maass der Linien, nicht das Maass der Flächen, also auch nicht das Maass des Quadrats habe. Gesetzt nun, das Quadrat sei seinem Wesen nach unerkennbar, aber doch nachweisbar, bestimmbar, weil es durch gerade Linien construirt werden kann, so bleibt diess unerkannte Quadrat in der gemessenen und erkannten krummen Fläche enthalten. Man hat

aber dennoch ein Wissen erlangt. Statt zweier unbekannter Grössen, des Quadrats und der krummen Fläche, hat man nur ein Unerkanntes, das Quadrat; das Schwierigere, die krumme Fläche, ist als unbekannt ausgeschieden, in die Erkenntniss eingereiht, und nur noch das Leichtere, das Quadrat, ist als unerkannt geblieben. Dadurch ist also denn doch der Zusammenhang mehrerer Dinge dargethan und Wissenschaft verbreitet worden. Es werden mehrere zu erkennende Gegenstände auf wenigere zurückgebracht. Und die Erkenntniss ist darum nicht schwankend, weil etwa das Quadrat noch unerkannt sei. Diess *Unerkannte* bleibt in der Erkenntniss. Nur wenn es etwas völlig *Unbestimmtes* wäre, von dem man nicht wüsste, wie es noch in der Erkenntniss bleiben könnte, dann wäre diese selber unsicher und unzuverlässig. Und vielleicht ist gerade die Zahl, in welcher die Fläche durch das Quadrat gemessen wird, das in allem mathematischen Denken zu Erkennende, und das Quadrat Hilfsmittel, diese Zahl zu finden. Die Hilfsmittel müssen immer die Bestimmtheit des Problems geben; die Beweise aber geben die Erkenntniss, die Auflösung des Problems.

Will man durchaus nur Erkanntes in den Beweisen anwenden, so kann man Erkenntniss voraussetzen und zu Tautologien gelangen. Eine Folge davon wird sein, dass alle gepriesenen Erkenntnisse in Wahrheit keine Erkenntnisse seien, und eine fernere Folge wird sein, dass man niemals zu andern Gedanken gelangen werde, als die man schon vorausgesetzt hat, dass man also nichts lernen werde. So wird jeder Fortschritt der Erkenntniss mit der Wurzel abgeschnitten; denn welcher Art können wohl die Erkenntnisse sein, die man schon vor aller wirklichen Wissenschaft vorausgesetzt hat? Auch ist Thatsache, dass die wahren Fortschritte in den Wissenschaften erst von den Experimentatoren und Mathematikern gemacht wurden, die sich nicht um die geheiligten Vorschriften bekümmerten, und sie bei jeder neuen Entdeckung übertraten, und so

gegen alles Recht und Herkommen ihre Wissenschaften bereicherten, so viel sie nur immer konnten.

Diess ist gerade Hauptsache, dass man anfangs auch unerkannte, aber bestimmte Gegenstände in die Beweise aufnehme. Diess schadet nichts, wenn man nur nicht Unerkanntes als Erkanntes nimmt. Freilich wenn man diess verwechseln wollte, so müsste Unwissenheit und nicht Wissenschaft hervorgehen. Aber man halte das Uerkannte als Uerkanntes fest, so hat man in ihm die zum Fortschritte treibende Kraft, es ist ein Stachel zur Erkenntniss, man wird nicht in Tautologieen ruhen können.

Endlich haben wir die bestimmteste Ueberzeugung gewonnen, dass alle Erkenntniss ein innerer Vorgang, ein Denken mit unsern Begriffen, nicht mit den Dingen selbst sei. So wahr wir durch die Sprache nur die Worte und Begriffe, und nicht die Dinge selbst in unser Inneres übersetzen, so wahr wird alle Wissenschaft nur im Denken mit Worten und Begriffen bestehen können. Erst wenn sie vollendet ist, werden ihre Resultate interpretirt und zu Wahrheiten der wirklichen Dinge selbst erhoben werden können.

Wäre das Wesen der Dinge so oberflächlich, dass wir durch eine und dieselbe Wahrnehmung die Gegenstände selbst, ihre objectiven Verbindungen, Veränderungen, Wirkungen, das Allgemeine und den Plan des Ganzen wahrnehmen, verfolgen und erkennen könnten, so würden die drei Zustände der Wissenschaft, die Uebersetzung, das Denken und die endliche Interpretation, sich decken, und wir würden statt eines Wissens ein Schauen haben, wie wir uns den Zustand der seligen Geister denken mögen. Aber auch so würden sich die drei Zustände der Wissenschaft nur decken, nicht aufheben, sie würden dennoch zu unterscheiden sein. Denn die *Nothwendigkeit* dieser ganzen Ordnung, Aufeinanderfolge und Wirkung der Dinge würde nicht durch Schauen, sondern nur durch Denken eingesehen werden können. — So oberflächlich und aufgedeckt ist uns aber das Wesen der Dinge nicht, wir werden ernstlich daran ge-

mahnt, diese drei Zustände recht scharf zu unterscheiden, wir nehmen anfangs nicht alles wahr, sondern nur Einzelnes, blosse Bruchstücke, aus denen wir das Ganze herstellen sollen. Und erst wenn wir dieses Ganze in uns und aus uns hergestellt haben, werden wir es auch in den Dingen finden können. Es ist eine ernstlich gemeinte Aufgabe, die uns in der Wissenschaft übertragen wird.

Die Sprache ist das Mittel, durch welches wir die Objecte des Denkens in unser Inneres übersetzen, in unsere Gewalt bringen. Aber kein Mittel der Wissenschaft darf ununtersucht oder unbewusst gebraucht werden. Es wird daher unsere nächste Aufgabe sein, zu erkennen, was die Sprache als Hilfsmittel der Wissenschaft leiste, was nicht, und was wir von ihr mit Recht erwarten, und was wir hingegen auf keine Weise von ihr fordern dürfen. In ihrer Einschränkung wird ihre Kraft liegen.

Vierte Untersuchung.

Ueber die Sprache.

Wir haben gefunden, dass die Sprache als erstes Hilfsmittel des Denkens feststehende und bestimmte Bezeichnungen für die noch unerkannten Dinge gebe, und sie die ganze Wissenschaft hindurch als dieselben Gegenstände der Erkenntniss unverändert erhalte.

Die Sprache ist im Allgemeinen die Herstellung und Verbindung *sinnlicher* Zeichen, welche bestimmten Wahrnehmungen, Empfindungen und Gedanken entsprechen, es mögen nun diese sinnlichen Zeichen hörbare Laute und Worte, oder sichtbare Gegenstände und Bilder sein. So werden die sinnlichen Zeichen für die Wissenschaft zur Hilfe gerufen, und wenn in dem Zustande, in welchem sich die Menschheit befindet, kein Denken ohne sinnliche Zeichen möglich ist, so wird auch für jetzt keine Wissenschaft ohne Sinnlichkeit möglich sein.

Da Gesicht und Gehör die zwei vorzüglichsten und umfangreichsten Sinne sind, so werden auch zwei diesen Sinnen entsprechende Sprachen, die Zeichensprache und die Lautsprache, gleich möglich sein. Da aber eine gemeinschaftliche, noch unwissenschaftliche Sprache immer nur Eines von beiden sein kann, entweder Zeichensprache, oder Lautsprache, da eine Vermischung beider die Einheit und Gleichförmigkeit der Sprache stören und aufheben würde, so ist einleuchtend, dass sowohl die Zeichensprache für sich allein, als auch die Lautsprache für

sich allein, wenn sie alle Dinge der Welt umfassen sollen, niemals bloss und durchaus natürliche und wesentliche, sondern immer theils natürliche, theils künstliche oder symbolische Elemente enthalten werden. Denn eine sichtbare Zeichensprache kann zwar die sichtbaren Gegenstände ihrer Aehnlichkeit nach ausdrücken, aber niemals die unsichtbaren Gegenstände. Ebenso kann eine Lautsprache zwar die Laute natürlich ausdrücken, aber nicht auch Dasjenige, was lautlos ist, wie z. B. eine sichtbare Farbe, für welche immer nur sehr entfernt oder gar nicht ähnliche und entsprechende Worte eingeführt werden können.

Wir setzen die Sprache überhaupt als eine Thatsache voraus, die dasjenige wirklich leiste, was von ihr gefordert wird, dass sie nämlich durch sinnliche Zeichen die noch unerkannten Gegenstände bestimme und feststelle (nicht aber wissenschaftlich erkennen lehre, sondern sie nur als Objecte der Erkenntniss erhalte), und gehen zu dem Beweise über, dass eine gemeinschaftliche, allgemein verständliche Sprache die nothwendige Voraussetzung jeder Wissenschaft sei.

Die Sprache ist nichts Individuelles, sondern ein Gemeingut eines ganzen Volkes. Was ein Einzelner in Wissenschaft und Kunst erwirbt, dessen können durch das Mittel der Sprache Alle theilhaftig werden, und was Einer denkt, das kann er durch die Sprache Allen mittheilen. Wissenschaft wird dadurch etwas Gemeinschaftliches, und Wissenschaft ist überhaupt nicht anders möglich, als durch Gemeinschaft.

Bestände keine Sprache, so müsste Jeder, der die Wissenschaft beginnen wollte, erst einzelne Worte, als Anhaltspunkte des Denkens, der Reihe nach bilden, und in dieser Bildung der Worte würde er alle seine Kräfte erschöpfen, und über der Vorbereitung der Hilfsmittel nimmermehr zur Wissenschaft selbst gelangen. Seine Kräfte würden aber zur Bildung einer ganzen Sprache lange nicht ausreichen, und es würden der Reihe nach Mehrere an dem gemeinschaftlichen Werke Antheil nehmen müssen. Es würde also eine Mittheilung eines Ersten an einen

Zweiten und an alle Folgenden stattfinden, und ihre gemeinsame Arbeit würde nur dann Früchte bringen, wenn die Sprache nach ihrer Vollendung Denjenigen mitgetheilt würde, die an das Werk der Bildung der Wissenschaft selber Hand anlegen wollen; so dass für Alle eine gemeinschaftlich erlernte Sprache die nothwendige Bedingung des Erkennens ist. Es führt also die Voraussetzung, dass eine gemeinschaftliche Sprache nicht zur Wissenschaft nothwendig sei, und dass ein Einzelner durch seine eigenen Kräfte Wissenschaft erwerben könne, zur Vernichtung ihrer selbst und zur Einsicht, dass Gemeinschaft der Sprache die Vorbedingung aller Erkenntniss und Wissenschaft sei.

Daraus kann nun wohl verstanden werden, wie es gemeint sein könne, wenn Einige sagen, dass sie ihre Wissenschaft ohne alle Voraussetzung ganz von Vorne anfangen. Diess kann nur bildlich und hyperbolisch gemeint sein, denn sie setzen die Sprache wirklich voraus, schon durch die Worte, die sie aussprechen. Ist aber die Sprache eine Voraussetzung, ein Hilfsmittel der Wissenschaft, so muss auch untersucht werden, was sie leisten könne, und was sie nicht leisten könne. Es ist unstreitig besser, sie zu untersuchen, als ununtersucht zu gebrauchen, und nicht einmal zu wissen, dass man sie gebrauche.

Ganz dasselbe, was von der Wortsprache gilt, gilt auch von der Zeichensprache. Denn die Bildung der nothwendigen Zeichen würde alle Kräfte eines ersten Forschers in Anspruch nehmen, und er würde vor lauter Vorbereitungen nicht zur Wissenschaft selbst kommen können. Vereinigten sich aber Mehrere zu demselben Zwecke, so müsste auch hier eine Mittheilung und Gemeinschaft der Sprache als nothwendige Vorbedingung jeder Erkenntniss und Wissenschaft angesehen werden.

Der Mensch ist durch Natur und Neigung zur Gemeinschaft mit Andern hingezogen, und er hat in der Sprache das Mittel, seiner Neigung und Naturnothwendigkeit auf die rechte Art zu genügen. Aber auch ohne den Willen, mit Andern zusammenzuleben und von ihnen verstanden zu werden, hätte sich der

Mensch, wenn er auf sich allein beschränkt wäre, doch eine Sprache bilden müssen, um seine Empfindungen und Gedanken durch sinnliche Zeichen festzuhalten, Vergangenes und Zukünftiges mit gegenwärtigen Empfindungen zu verknüpfen, und in seinem geistigen Leben mit Hilfe dieser sinnlichen Zeichen einen innern Zusammenhang herzustellen. Denn da die einmaligen wirklichen Empfindungen und Wahrnehmungen als Empfindungen und Wahrnehmungen unabhängig von unserm Willen sind, und nochmal eintreten können oder nicht, so muss man die Mittel haben, sie ohne ausdrückliches nochmaliges Empfinden in die Erinnerung zu bringen, und diese Mittel sind nur sinnliche Zeichen, nicht aber die Empfindungen selber. Diese sinnlichen Zeichen bilden den Inbegriff der Sprache, und so ist Sprache unbedingt selbst für den Einzelnen nothwendig, wenn er einen Zusammenhang seiner Empfindungen und Erkenntnisse haben will. Die Worte der Sprache sind dann die Abkürzungen für den Hergang der Empfindungen und die Mittel ihrer Wiedererinnerung.

Diese Sprache der einzelnen Menschen könnte aber eben so gut künstliche Zeichensprache, wie natürliche Wortsprache sein, und sie würde wahrscheinlicherweise Zeichensprache sein, wenn nicht noch das Element hinzugekommen wäre, dass der Mensch mit Andern leben, Andere verstehen und von ihnen verstanden werden will, worin die Wortsprache einen unbedingten Vorzug vor der Zeichensprache voraus hat.

Setzen wir den Fall, dass ein einzelner Mensch sich selbst überlassen, das Bedürfniss nach Wissenschaft fühlte, und sich als erste Stufe zu ihr eine Sprache bildete — ein Fall, der niemals stattgefunden hat, und der nur der wissenschaftlichen Analyse willen vorausgesetzt wird — so würde allerwahrscheinlichst eine Zeichensprache hervorgegangen sein; einmal, weil sich das Natürliche, wie es die Wortsprache ist, auch nur im natürlichen Hergange der Dinge bildete, und künstlich ge-

sucht verfehlt würde, und dann, weil für einen Einzelnen die selbstgeschaffene Zeichensprache viel mehr Anhaltspunkte des Lernens und Erinnerns gäbe, als eine Wortsprache, die er von Niemanden sprechen hörte, und die er doch in beständiger Uebung des Lernens erhalten müsste, da ihm erst durch die Gemeinschaft mit Andern die Wortsprache erleichtert und zur wahren zweiten Natur gemacht wird. Aus denselben Gründen aber, aus welchen hervorgeht, dass die Zeichensprache für einen Einzelnen leichter und vortheilhafter sein müsse, als die Wortsprache, geht auch hervor, dass beim Zusammenleben und Umgange mit Andern die Wortsprache jeder künstlichen Zeichensprache vorgezogen werden müsse. Denn die Laute und Worte bilden die zunächstgelegenen, natürlichsten und zugleich innerlichsten und wirksamsten Mittel der Mittheilung, und wir bilden sie, ohne andere Hilfsmittel vorauszusetzen, als die wir schon unmittelbar haben, und im Umgange mit Andern täglich anwenden; während die Bildung einer Zeichensprache im Umgange neue Hilfsmittel erforderte, und neben grosser Umständlichkeit und Dürftigkeit im Vergleiche mit der eben so einfachen, natürlichen und reichen Wortsprache immer eine fremde und seelenlose Mittheilung bliebe, und mit der Wortsprache an Innerlichkeit und Seligkeit der Mittheilung gar nicht in Vergleich gestellt werden könnte.

Ist aber einmal die Wortsprache die allgemeine Sprache geworden, so gebraucht sie auch der einzelne Denker in seinen Forschungen für sich selber; es wäre eine Aufhebung der natürlichsten und besten Ordnung und Gewohnheit, wenn er in andern Hilfsmitteln als in Worten denken wollte. Dennoch kann es kommen, dass diese Gewohnheit überschritten werden muss, wenn im Gebiete der Wissenschaft weiter vorgedrungen wird, und wenn die zusammengesetzten und höheren Wahrheiten nicht durch die Mittel der Worte, sondern durch die Mittel der wissenschaftlichen Zeichensprache entdeckt und gelehrt werden müssen, obgleich es möglich sein mag, dass sie einmal

gefunden, dennoch in der Wortsprache wieder gegeben werden können.

Da uns die *Wortsprache* zur zweiten Natur geworden ist, so ist nicht zu verwundern, wenn Einige, uneingedenk des Hergangs dieser Gewohnheit, die *Sprache* überhaupt nur als Mittel des Ideen-Austausches nehmen, obgleich auf's deutlichste eingesehen werden kann, dass diess zwar eine sehr wichtige Seite der Sprache sei, aber noch lange nicht ihr ganzes Wesen erschöpfe, da sie auch unabhängig von jeder wirklichen Mittheilung jedem Einzelnen nothwendig ist, wenn er zu irgend einem Wissen gelangen will.

Gäbe es keine Sprache als Gemeingut der Menschheit, so würden wir sie gerade so bilden müssen, wie sie schon gebildet ist, als Inbegriff bestimmter sinnlicher Zeichen für festgestellte aber noch unerkannte Gegenstände.

Warum *unerkannter* Gegenstände? Weil diess die Stärke der Sprache ist, dass sie sich bescheiden könne, Sprache zu sein, und keinerlei Anspruch auf Erkenntniss selber mache. Diess kann sie nicht leisten, und Erkenntniss darf auf keine Weise von ihr gefordert werden, wenn sie als Sprache mit allem Guten, was sie hat, fortbestehen und wirken soll.

Die Sprache würde aber Anspruch darauf machen, Erkenntniss der Dinge zu sein, wenn sie centrale, adamitische oder wesenhafte Sprache wäre, wie sie von einigen Theosophen gedacht worden ist, während die gewöhnliche Sprache nur *symbolische* Sprache ist, indem ihre Zeichen an die Gegenstände erinnern, sie festhalten und vor Verwechslung schützen, nicht aber das Wesen der Gegenstände selbst erklären.

Nehmen wir z. B. das Wort *Sonne*, so sind mehrere Elemente und Laute in diesem Worte verbunden. Auch die wirkliche Sonne hat Elemente, durch die sie ist, was sie ist. Nun würde das Wort *Sonne* ein wesenhaftes Wort sein, wenn die einzelnen Laute dieses Wortes den einzelnen Elementen dieses Gegenstandes entsprächen, und wenn die Verbindungen

der Elemente im Worte dieselben wären, wie die Verbindungen der Elemente im Gegenstande, und wenn endlich diese Elemente in allen übrigen Verbindungen nur als diese bestimmten Elemente gebraucht würden, so dass z. B. der Mitlaut S in allen übrigen Worten dasselbe wesenhafte Element bezeichnen müsste, welches er in dem Worte *Sonne* bezeichnete.

Diess wäre freilich etwas Vortreffliches, wenn es so sein könnte; wir brauchten statt der Dinge nur die Worte zu analysiren, und wir würden doch die Wesenheit aller Dinge vollkommen erkennen, was die heissesten Wünsche aller Forscher noch weit übertreffen würde. So aber, wie es in der Wirklichkeit ist, finden wir in der Analyse der Sprache nur dasjenige, was die Menschen in die Sprache hineingelegt haben, und wir lernen die grosse oder geringe Wissenschaft und Anschauung Derjenigen kennen, welche zuerst die Sprache gebildet haben, nicht aber das Wesen der Dinge selbst. Diess könnten wir nur dann kennen lernen, wenn Gott selber die Sprache gesprochen hätte. Er hat sie gesprochen, aber seine Sprache sind seine Werke; in ihnen haben wir die Erkenntniss aller Wahrheiten zu suchen und zu finden.

Allerdings ist es eine höchst anziehende Untersuchung, welche Worte in der Sprache ursprünglich und *gleichsam* wesentlich, und welche spätere, abgeleitete, auf irgend eine Art in die Sprache eingeführte Worte seien, und welche Sprachen ursprünglich und welche nicht ursprünglich, sondern von andern abgeleitet, und in Bezug auf diese Sprachen nur hörige Sprachen seien. Aber so grossen Werth diese Untersuchungen für die Sprachforschung haben, so geringen Werth haben sie für den Bau der Wissenschaft selbst. Sie haben geschichtlichen Werth, dass man aus ihnen die Tiefe und den Umfang der Erkenntniss, die Sehergabe Derjenigen inne werde, welche die Sprache ursprünglich gebildet haben, und dass man einsehe, welche Völker in solch erster Erkenntniss angetroffen werden, und welche nicht. Auf die Wissenschaft selbst hat

diess keinen Einfluss, weil von ihr die Sprache nur als Mittel gebraucht wird, und weil die Erkenntniss nicht aus der Sprache, sondern aus den Werken Gottes geschöpft werden muss.

Diess ist aber darum zum Theil so schwierig, weil die Sprache schon längst gebildet ist, und als ein Kind wachsender und reifender Erkenntniss immerfort in dem Kleide erscheint, das ihm ursprünglich im Beginne der Erkenntniss gewoben wurde, das zwar ebenfalls fortwächst und sich neuen Gedanken anschmiegt, aber nimmermehr allen Bedürfnissen genügen zu können scheint, die bei der ersten Bildung nicht vorausgesetzt wurden, und um derentwillen allein auch die Sprache nicht gebildet worden ist. Die Sprache soll nämlich nicht bloss der Wissenschaft, sondern auch dem gegenseitigen Verständnisse und dem Leben dienen, und dient diesen gewöhnlich um so besser, je weniger sie in die Tiefe eindringen will.

Nun könnte es aber eine der gerechtesten Anforderungen zu sein scheinen, dass mit fortschreitender Wissenschaft auch die Sprache fortgebildet werde, in dem Sinne, dass ihre Worte nicht blosse Bezeichnungen unerkannter Dinge bleiben, sondern dass sie Alles in der Erkenntniss Enthaltene durch und durch ausdrücken und darstellen. Aber schon der geringe Erfolg, das Mislingen aller Versuche, die in dieser Hinsicht angestellt worden sind, zeigen zur Genüge, dass es wenigstens ein mit den grössten Schwierigkeiten verbundenes Unternehmen sein müsse, die Sprache umbilden zu wollen. Ja ein solches Unternehmen würde nicht bloss mit unübersteiglichen Hindernissen zu kämpfen haben, sondern es würde auch statt einer Vervollkommnung nur eine Verringerung, und, wo möglich, eine Zerstörung der Wissenschaft und Sprache herbeiführen müssen. Denn da die menschliche Wissenschaft nur ein Kind der Zeit und des Fortschritts im Gewande der Sprache ist, und da die Sprache mit der fortschreitenden Wissenschaft auch fortgebildet werden müsste, dass sie nicht mehr blosse Bezeichnungen unerkannter Dinge, sondern alles im Objecte

Enthaltene ebenfalls in sich enthielte, so müssten mit den Fortschritten der Wissenschaften die wesentlichen Elemente der Sprache und ihr ganzer Bau fort und fort verändert werden. In dem Maasse, als die Erkenntniss eines Dinges reicher würde, müssten auch die Bezeichnungen und Worte verändert und bereichert werden, wenn sie das durch Erkenntniss Gewonnene in sich ausdrücken und darstellen wollten, und die immerfort veränderte Sprache müsste immerfort auf's Neue erlernt werden.

Eine auf solche Art bereicherte Sprache würde aber bei dem ersten Fortschritte der Erkenntniss lange nicht alle Gegenstände umfassen, und sie würde sehr viele symbolische und einige wenige wesenhafte Worte enthalten können. Dadurch wären widerstrebende Elemente in die Sprache eingeführt, und ihre Wechselwirkung würde darauf hinzielen, dass die wesenhaften Worte durch die Wissenschaft unterstützt die symbolischen Worte zu überwinden und zu vertilgen strebten, um alleinherrschend werden zu können. Mit der Reinigung der Sprache von den symbolischen Worten würde aber eben so oft eine Reinigung von den wesenhaften Worten stattfinden müssen, denn jede spätere Erkenntniss berichtigt die vorhergehende und stellt sie als mangelhaft dar; Worte, die für eine mangelhafte Erkenntniss als wesenhafte Worte gelten, sind nur wesentlich in Bezug auf mangelhafte Erkenntniss, nicht aber in Bezug auf wahre Erkenntniss. Die symbolischen und wesenhaften Worte würden sich aber bei diesem Reinigungsprozesse der Sprache ganz verschieden verhalten müssen. Während die symbolischen Worte keinen Anspruch darauf machten, Erkenntnisse zu sein, sondern sich als blosser Anhaltspunkte der Erkenntniss bescheiden, eine Bescheidenheit, die eben vertilgt werden sollte, würden sich die wesenhaften Worte, sie möchten vollkommen oder mangelhaft sein, alerdings den Vorzug zusprechen, Erkenntnisse zu sein, und würden sich auf solche Ansprüche gestützt nicht so leicht zu einer nachfolgenden Umprägung bescheiden wollen. Da es immer eine grosse Verschiedenheit der Systeme giebt,

so würden die Einen ein wesenhaftes Wort als mangelhaft bezeichnen und ausmerzen oder umprägen wollen, während es die Andern als ein wesenhaftes Wort hartnäckig festhalten und gebrauchen wollten, und dann träte in der Sprache, die doch das gemeinschaftliche Band aller Wissenschaften und Systeme sein soll, ein Krieg Aller gegen Alle ein, eine vollständige Verwirrung in bester Form, aus bestem Wissen und in bester Absicht. Der Streit der Systeme würde auf den neutralen Boden der Sprache verpflanzt werden. Aber der Ausgang dieses Streites müsste auf dem Gebiete der Sprache ein ganz anderer sein, als auf dem Gebiete der Wissenschaft. Wenn sich die Systeme bestreiten und zerstören, so geht die Wissenschaft nicht unter, weil sie noch eine unantastbare Grundlage in der gemeinschaftlichen Sprache hat, die von dem Streite der Systeme niemals ernstlich berührt wird, und alle Gegenstände, nach wie vor, als Gegenstände der Erkenntniss erhält und bewahrt. Aber die Sprache hätte nicht wie die Wissenschaft etwas Anders ihr Vorausgehendes; mit ihren vorgeblichen wesenhaften Worten würden die Gegenstände selbst verändert und idealysirt werden. Die Sprache müsste endlich diesen innern Zerwürfnissen erliegen, und mit ihr würde alle Vernunft und alle Wissenschaft untergehen müssen.

Man könnte einwenden, dass diess nur eine Unvollkommenheit der menschlichen Natur sei, nicht aber eine Unvollkommenheit der wesenhaften Sprache. Es muss daher gezeigt werden, dass selbst die vollkommenste menschliche Natur und die vollkommenste Erkenntniss vorausgesetzt, diese wesenhafte Sprache dennoch verworfen, und dass das Wesen der Sprache überhaupt in etwas ganz anders, als in Erkenntniss gesetzt werden müsse. Denn wie jede andere Sprache müsste auch die wesenhafte Sprache nur wenige und in bestimmter Anzahl gegebene Elemente haben, aus denen die Worte und Sätze gebildet werden könnten. Nur das in bestimmter Anzahl Gegebene z. B. die Summe von dreissig oder vierzig Buchstaben oder Lauten kann übersichtlich und erkenn-

bar werden. Es können daher bei spätern und höhern Erkenntnissen, d. h. nicht der Zeit, sondern dem Systeme nach spätern und höhern Erkenntnissen — nicht immer neue und wieder neue Elemente eintreten, da es vielmehr Aufgabe ist, dass Alles mit den ersten bestimmten Elementen geleistet werde, damit Erkenntnisse aus Erkenntnissen abgeleitet und begriffen werden. Es müssten sich daher die vorhergehenden Elemente immer wieder aufs Neue verbinden und zusammensetzen, und so würde man gar bald zu dem unerwarteten Ziele gelangen, dass die nachfolgenden Worte immer weitläuftiger würden, bis sie endlich von Stufe zu Stufe zu den langwierigsten Zusammensetzungen, zu wahrhaft monumentalen und unaussprechlichen Wörtern heranwachsen, und jede Sprache und Wissenschaft unmöglich machen würden. Wollte man aber von Zeit zu Zeit neue und einfache, nicht mehr wesenhafte Worte einführen, die also auch nicht mehr alle Zusammensetzungen der Elemente enthielten und darstellten, so käme die so verbesserte vollkommene Sprache auf die gewöhnliche Sprache zurück, denn diese besteht eben darin, dass ihre Worte nicht mehr die wesenhaften und ableitbaren Elemente enthalten, sondern Symbole geben, durch welche nur die erkannten oder zu erkennenden Gegenstände festgestellt, aber nicht ihrem Wesen nach erklärt werden, denn diess ist nicht Aufgabe der Sprache, sondern der Wissenschaft. Die Wissenschaft allein leistet das, was man in der wesenhaften Sprache gesucht hat, und immerdar vergeblich suchen wird; denn was man in der Sprache finden will, das kann nur in der Wissenschaft gefunden werden.

Dieser Weg der Natur, der niemals ungestraft verlassen werden kann, hat sich auch in allen andern Einrichtungen bewahrheitet. Ueberall wo eine freie Bewegung stattfinden soll, muss zuerst ein sicherer, von dieser Bewegung nicht ergriffener Boden gegeben sein, der weit entfernt, der Bewegung hinderlich zu sein, sie erst möglich macht und fördert. Wollte man aber in der falschen Meinung, die freie Bewegung absolut

vollkommen zu machen, den sichern, unbeweglichen Boden selber mit in die Bewegung ziehen, dann würde erst Alles schwankend, und der Ansatz zur Bewegung selbst in Frage gestellt werden.

Die Sprache, in der wir uns Alle verstehen, ist die sichere Grundlage, auf der eine freie wissenschaftliche Bewegung eingeleitet werden soll. Will sie aber selbst die ganze Wissenschaft sein, dann fällt die allgemeine Sicherheit des Verständnisses weg, sie wird selbst in allen Irrthum mit hineingeführt, sie müsste dann erst wieder vom Irrthume gereinigt und erst wieder als eine andere hergestellt werden, wenn es überhaupt möglich wäre, eine wesenhafte, also Erkenntniss gebende Sprache vor der Erkenntniss herzustellen. So aber, wenn die Sprache symbolisch bleibt, und nicht selber Anspruch darauf macht, Erkenntniss zu sein, sondern nur sprachlich verständliche und feststehende Bezeichnungen für die Gegenstände geben will, dann kann bei jeder wissenschaftlichen Bewegung, wenn etwa Zweifel und Irrthümer auftauchen, auf den sicheren Boden der unversehrten Sprache zurückgegangen werden. Die Sprache wird die Probleme als die Ausgangspunkte der Erkenntniss und die etwa schon gewonnenen Erkenntnisse behalten und bewahren, während sie selber, wenn sie Erkenntniss sein wollte, mit dem Irrthume untergehen müsste, und weder die Anhaltspunkte, noch die bereits gewonnenen Erkenntnisse bewahren könnte. So aber erhält sie ein gegen jedes wissenschaftliche System neutrales Gebiet, und stellt wohl die Probleme fest, aber nicht die wahren oder falschen Auflösungen derselben, die in irgend einer Wissenschaft gegeben worden sind.

In letzter Intention leistet die Sprache folgendes für die Wissenschaft:

1) Sie giebt der Wissenschaft sprachlich verständliche Worte als feste Bezeichnungen der Objecte und Probleme, und macht dadurch den Beginn der Wissenschaft möglich. Denn

müssten die Objecte schon durch Wissenschaft benannt werden, so müsste die Wissenschaft schon vor ihrem eigenen Beginne vorhanden sein, ein Zirkel, der ohne die Thatsache einer allgemein verständlichen Sprache unvermeidlich und unauflöslich wäre. So aber werden die Bezeichnungen der Dinge nicht durch Wissenschaft gebildet und auch nicht durch Wissenschaft bewahrt, sondern durch die Sprache, und auch nicht von einem Einzelnen, sondern von einem ganzen Volke. Ein Einzelner könnte dieses weder geben, noch erhalten, und was jeder Einzelne in seinem Denken der Gemeinschaft mit den Andern verdankt, diess wird von der gemeinsamen Sprache getragen und gehalten.

Diess von jedem Irrthume der Erkenntniss ungetrübte Element der Sprache bewirkt auch, dass die Wissenschaft trotz ihrer unvermeidlichen Irrthümer erhalten und fortgebildet werden kann; es bildet den neutralen Boden aller Denkenden und den Punct der Verständigung, auf den zurückgegangen werden kann, wenn Irrthum und Verwirrung eingetreten sind, und von dem aus sogleich wieder zu einer bessern Erkenntniss fortgeschritten werden kann. Darum wird auch jede wahre Wissenschaft den Sprachschatz eines Volkes achten, denn er ist unantastbar, er ist kein Gut, das nach Belieben vergeudet, oder gar mit sprachlich unverständlichen Worten, bei denen niemals etwas Bestimmtes gedacht worden ist, bereichert werden darf.

2) Durch die Sprache sucht sich der Mensch über die Fläche der ihn umgebenden Erscheinungen zu erheben, um gegen sie frei zu werden, und um sie verstehen zu lernen. Wer nicht (wenigstens innerlich) sprechen könnte, der müsste unaufhörlich unter dem allbeherrschenden Einflusse der Erscheinungen stehen, er müsste unter ihnen leiden, ohne ihnen entgegenwirken zu können, er müsste unter ihnen untergehen, statt sie verstehen und begreifen zu lernen. Würde sich auch sein Gegenwirken und sein Denken so weit erheben, dass er sich die Erscheinungen als Bilder seines Innern gegenüberstellte,

also sich in seinem Innern von der Erscheinungswelt ablöste, und wie er meinen könnte, eine freie Welt der Bilder-Gedanken bildete, (wie in der Wissenschaftslehre von *Fichte*), ein brennendes Nessos-Kleid, das er nicht abzuschütteln vermöchte, so würde er dennoch der Welt gegenüber nur eine geringe Freiheit und eine niedere Stufe der Erkenntniss einnehmen. Denn die Bilder seines Innern bestünden aus zwei verschiedenen Factoren, aus den wirklichen Erscheinungen der Welt und aus dem sie bildenden und vereinenden Denken. Der erste Factor ist ganz und gar nicht in der Macht des Menschen. Der Mensch kann die Erscheinungen nicht zwingen, dass sie jetzt eintreten oder nicht, wenn er sie gerade verbinden, trennen und begreifen will. Er ist immer noch in der Welt befangen und von ihren Erscheinungen in seiner Erkenntniss abhängig. Erst wenn er die Erscheinungen in seiner Gewalt hat, und sie innerlich hervorbringen kann, wie er will, wenn er den letzten Schritt wagt, und die Bilder seines Innern mit Worten bezeichnet und ausspricht, die ganz sein Werk sind, und deren Bestehen nicht von der jedesmaligen Erscheinung oder von der jedesmaligen Empfindung der Erscheinung abhängt, dann erst hat er eine Grundlage des Denkens, die er selbst gelegt hat, und die er auch vervollkommen und durch Wissenschaft ausbilden kann. Die Worte, die er bildet, haben keine andere Abhängigkeit von den Erscheinungen und ihren Bildern, als die er ihnen selber giebt. Daraus folgt aber nicht, dass sie gar keinen Zusammenhang mit ihnen haben; es werden die Begriffe und die Dinge durch die sie bezeichnenden Worte nicht weggeworfen, sondern bewahrt, nur hat sich der Mensch durch die Worte gegen sie frei gemacht. Er ist nicht mehr von ihren unmittelbaren Einwirkungen abhängig, um ihre Bilder in sich bilden zu können, sondern er kann diese durch Worte hervorrufen und besser festhalten, als es in unmittelbarer Einwirkung geschehen könnte.

Der Mensch mag nun in diesem letzten Schritte seiner

Befreiung von den Banden der Erscheinungswelt, in seinem Durchgange zur Sprache, irren oder richtig gehen, jedenfalls wird es ein nothwendiger Schritt zur freien Erkenntniss sein, zur Schöpfung einer Welt in seinem Innern, die er allein in dieser Weise auf eine Gesamt-Erkennntniss, auf ein von den Erscheinungen unabhängiges und sie alle begreifendes System zurückbringen kann.

3) Es giebt aber noch eine letzte über die Sprache weithinausreichende Absicht, die Jedem bei ihrem wissenschaftlichen Gebrauche vorschwebt. Wir bringen nämlich die Worte und die durch Worte bezeichneten Gegenstände in Ableitbarkeit und gegenseitigen Zusammenhang und sehen Eines aus dem Andern ein, und wir wünschen, dass derselbe Hergang objectiv in den Gegenständen der Erkenntniss so statfinde, wie er in unserm Denken durch Worte statfindet, oder vielmehr: wie die Dinge im Zusammenhange und in Abhängigkeit stehen, gerade so sollten ihre Bezeichnungen und Worte *aus sich selbst* in Zusammenhang und Abhängigkeit gebracht werden, und zwar nicht unterbrochen durch den jedesmaligen Rückblick auf den wirklichen Zusammenhang, sondern unabhängig und a priori, gleichsam durch ihre Elemente selber. Wir sollten strenggenommen mit den blossen Worten so verfahren können, wie z. B. die Analysis mit den Zahlen verfährt, aus deren Rechnungen alle Resultate mit Sicherheit hervorgehen, unabhängig von den wirklichen Grössen, mit denen sie im Zusammenhange stehen. Diess könnte nur die früher als wesenhaft und central bezeichnete Sprache leisten, wenn sie möglich und wenn sie überhaupt nur wünschenswerth wäre. Es ist aber bewiesen worden, dass sie keines von beiden sei. In der dunklen Ahnung aber, dass etwas sein müsse, das dieses für die Erkenntniss Wünschenswerthe leisten könne, haben alle Versuche der Umbildung und Verbildung der Sprache ihren Ursprung, und sie fehlen nur darin, dass sie dasjenige, was wesentlich verschieden und getrennt ist, nämlich Sprache und Wissenschaft, vereinigen wollen und mit einander verderben.

Dasjenige aber, von dem man erwarten dürfe, dass es uns durch reine Analyse seiner eigenen Elemente und unabhängig von der jedesmaligen Erfahrung ein rein apriorisches Wissen geben werde, wird nicht mehr die Wortsprache, sondern ein ihr nachfolgendes zweites Hilfsmittel der Wissenschaft sein können.

Dieses zweite, wissenschaftliche Denken ist ein Hinabsteigen in die Tiefen der Welt und in die Tiefen des Innern, damit wir die rechte Unterscheidung und Verbindung dessen finden, was wir im ersten Denken, in der Sprache, übergangen haben und übergehen mussten. Die vorausgehende Sprache schützt aber das Denken, dass es sich nicht selber verliere, und dass es die neuen wissenschaftlichen Wahrheiten wieder in der Sprache, in der freiesten der freien menschlichen Schöpfungen darstellen und beherrschen könne. Denn wer sich selbst verlieren würde, könnte nimmermehr zur Erkenntniss kommen; die Sprache ist die Sammlung zu sich, das wahre Gegenmittel gegen das Verlieren seiner selbst, gegen das Beherrschtsein von den Gegenständen und das Ueberstürztwerden von den Erscheinungen; und jedenfalls müssen sich in aller Erkenntniss eben so wohl der zu erkennen fähige Geist als auch der zu erkennende Gegenstand vereinigen, wenn wahre Erkenntniss hervorgehen soll. Der zu erkennen Fähige ist aber allein der Sprechende, und das Erkennbare ist allein das Auszusprechende. Das Unausprechliche könnte eben so wenig erkannt werden, als der nicht Sprechen Könnende (Sprache im allgemeinen Sinne genommen) jemals zur Erkenntniss gelangen könnte.

Fünfte Untersuchung.

Von den Definitionen.

Das zweite höhere Hilfsmittel des Denkens wird vielleicht in den Definitionen gesucht werden, da mit Ausnahme der Mathematik alle Wissenschaften nur Sprache und Definitionen als Hilfsmittel des Denkens haben. Und allerdings nähert sich die Definition der wesenhaften Sprache. Die definirten Worte enthalten mehr Erkennbares, als die blossen Worte der Sprache, sie führen für die bereits bestimmten Verbindungen bestimmter Gegenstände besondere Namen ein, während die Worte der Sprache nur die unerkannten Gegenstände als Probleme feststellen. Es ist daher zu untersuchen, ob die Definitionen allen Forderungen, die mit Recht an ein solches Hilfsmittel der Wissenschaft gestellt werden müssen, genügen können oder nicht. Aristoteles berichtet von Sokrates, dem Lehrer Griechenlands, dass er das Moment der Definition in die Wissenschaft eingeführt habe. Vor ihm waren die Definitionen etwas Ungewöhnliches, indem Jeder auf seine Weise sprach, unter der Voraussetzung, dass alle Andern unter demselben Worte dieselbe Sache denken werden, und in der ferneren und wichtigeren Voraussetzung, dass sie sich selber etwas Wahres unter den Worten ihrer Rede gedacht haben werden. Sokrates zeigte ihnen nun, dass sie sich gewöhnlich nichts Bestimmtes unter ihren Aus-

drücken gedacht hatten, und leitete dadurch den ersten Selbstverständigungs-Prozess des menschlichen Denkens durch das Gegentheil ein. Er ist auch vom Orakel des Apollon für den Weisesten Griechenlands erklärt worden.

Sokrates fragte die Sophisten, was sie sich wohl z. B. unter Tapferkeit denken möchten, er drängte sie, diess ihm vorher zu erklären, ehe er sich auf Weiteres einliesse. Die Sophisten antworteten, Sokrates fragte aufs Neue, die Sophisten wurden schwankend, und endlich stellte sich heraus, dass sie sich nichts Bestimmtes und Bleibendes gedacht hatten. Sokrates barg sich dann in seine Unwissenheit, und überliess die Sophisten ihrem Aerger. Diess war der ganze Erfolg. Es war allerdings eine Umkehrung der Methode, denn es ist nicht am Anfange, sondern erst am Ende einer Untersuchung deutlich, was ein Begriff wahrhaft enthalte, was man sich Alles in ihm zu denken habe. Vor der Untersuchung kann der Begriff nur in so weit festgestellt werden, dass er nicht mit andern Begriffen verwechselt werde. Es war daher ganz natürlich, dass Alle bei einer Unterredung mit Sokrates wie von einem Schwindel befallen wurden; denn er suchte sie in der That auf die Köpfe zu stellen, er war der Stärkere unter ihnen. Wissenschaftliche Resultate konnten daraus nicht hervorgehen, und um diese handelte es sich auch nicht, denn die Sophisten verfolgten praktische Zwecke. Sie lehrten die Kunst, in den Volksversammlungen zu herrschen, die Menge zu überreden, Feldherrnstellen zu Land und zur See zu gewinnen, die Feinde zu verdächtigen, anzuklagen, zu vernichten. Und sie gaben vor, dass diess Ziel ohne anderweitige Uebung schon durch ihre Wissenschaft allein erreicht werden könne. Sie lehrten also nur die Anwendung, und setzten die Erkenntniss voraus. — Sokrates handelte ganz weise, dass er sie nach der von ihnen vorausgesetzten allbekannten Erkenntniss ausforschte, er wusste wohl, dass es ihnen nicht um Erkenntniss zu thun sei. Wer hätte aber ahnen können, dass diess Ver-

fahren auch auf wissenschaftliche Untersuchungen angewendet würde, und zwar Jahrtausende lang?

Will man eine Untersuchung mit Definitionen beginnen, wie sie Sokrates verlangt, dass nämlich die Natur des Gegenstandes begriffen, also Erkenntniss *vor* Erkenntniss gewonnen werden soll, so wird man nie etwas Erhebliches erreichen können. Es muss den Fortschritt jeder Wissenschaft hemmen, wenn der Gegenstand schon verdorben, alterirt wird, ehe er nur ernsthaft angegangen wird. Wenn z. B. von *Spinoza* an den Anfang seiner Ethik die Definition gestellt wird: „Unter Gott verstehe ich das absolut unendliche Wesen, d. h. die Substanz, die aus unzähligen Attributen besteht, deren jedes wieder eine ewige und unendliche Wesenheit ausdrückt“ — so kann diess eine Definition sein, aber auch ein versteckter Lehrsatz, der nur für eine Definition ausgegeben wird, damit die Last des Beweises wegfallen möge. Jener Satz ist entweder eine Uebersetzung aus dem Reiche des Seins in das Reich unsers Denkens, dann wird der wirkliche Gott gemeint, und dann ist auch Vieles überflüssig, denn schon das Wort *Gott* allein drückt diese Uebersetzung aus, oder aber, er ist eine Verbindung mehrerer Begriffe, der Begriffe: Gott, Substanz, Wesenheit, Attribut u. s. w., dann ist es ein Lehrsatz, der bewiesen werden muss. Man kann wohl irgend ein imaginirtes unendliches Wesen, eine Substanz, die aus unzähligen Attributen besteht, deren jedes eine ewige und unendliche Wesenheit ausdrückt, *Gott* nennen; allein dann ist es immer noch zweifelhaft, ob diess der wirkliche Gott sei, der Himmel und Erde erschaffen hat, der Gott in seiner Reinheit und Unerkanntheit, der durch die Worte der Sprache in dieser seiner unerkannten Ganzheit gegeben wird, oder ob es nur ein ideales Gebilde, ein Begriff ohne vorausgehende Uebersetzung aus der Wirklichkeit sei, wenn nicht ausdrücklich in einem oder in mehreren Lehrsätzen bewiesen wird, dass der wirkliche Gott diese Wesenheit des definirten Gottes habe, was nicht durch Definitionen, sondern durch Beweise dargethan

werden kann. Bis dahin kann man diesen definirten Gott wohl als einen erdichteten Gott ansehen, und von solchen Definitionen aussprechen, dass sie gegen alle Regeln erdichtete Wesen in die Wissenschaft einführen, während umgekehrt durch Definitionen nur vorher erkannte und abgeleitete Begriffe in einen Charakter oder Namen zusammengezogen werden sollen. Ueberdiess werden der Sprache ihre guten Namen genommen. Will man einmal Erdichtetes einführen, so soll man auch die Namen dazu erdichten, und der Sprache ihre wahren Namen und Worte lassen.

Diess Alles könnte an sich sehr unschädlich scheinen, wenn nicht eine ganze Wissenschaft auf solche Definitionen gebaut würde, und wenn nicht Alles, was von diesem erdichteten Gotte aus der vorausgeschickten Definition bewiesen werden mochte, ohne Weiteres auf die Lehren von dem wahren Gotte übertragen würde. Auf diese Art entstünde ein Götzendienst statt einer Gotteslehre, und die wahre Erkenntniss Gottes würde ganz unmöglich gemacht werden.

Pascal führt diess an einem andern Beispiele ganz treffend aus. Einige wollen am Anfange der Wissenschaft z. B. das Wort Zeit definiren. (In Wahrheit wird man niemals das Wort, sondern den Gegenstand definiren wollen. Alle Menschen wissen aus der Sprache, welcher noch unerkannte Gegenstand durch das Wort Zeit bestimmt werde. Aber über das Wesen der Zeit giebt es sehr verschiedene Meinungen. Die Einen sagen, dass sie die Bewegung der geschaffenen Dinge sei; die Andern, dass sie das Maass dieser Bewegung sei u. s. w. Nicht die Natur der Dinge ist durch die Worte der Sprache festgestellt, sondern einfach der Zusammenhang zwischen dem Worte und der Sache; bei dem *Worte* Zeit denken alle an dasselbe Object oder Problem, und darum braucht das Wort nicht definirt zu werden, obgleich später bei den Untersuchungen über das *Wesen* der Zeit die grössten Schwierigkeiten und Uneinigkeiten auftauchen können; doch diess sind Schwierigkeiten der Beweise und nicht

der Sprache. Die Sprache hat geleistet, was sie leisten sollte, sie hat ein bestimmtes Object für die Untersuchung festgestellt.)

Pascal fährt fort: Es mag erlaubt sein, die Bewegung der erschaffenen Dinge *Zeit* zu nennen, denn wie schon bemerkt worden ist, so können die Namen der Definitionen sehr willkürlich gewählt werden. Aber dann giebt es zwei Dinge, die man mit demselben Worte *Zeit* benennt; die eine *Zeit* ist die wirkliche, wie sie alle Welt meint, die andere aber ist diejenige, welche die Bewegung der geschaffenen Dinge genannt wird; und wer immer die neue Definition gebraucht, der wird diess unter *Zeit* verstehen müssen, obgleich diese möglicher Weise eine bloss erdichtete und von der wahren *Zeit* himmelweit verschiedene *Zeit* sein kann. — Wenn nun in einer wissenschaftlichen Untersuchung die *Zeit* als die Bewegung eines erschaffenen Dinges ausgesprochen wird, so ist vor Allem zu fragen, was unter dem Worte *Zeit* verstanden werden soll, ob die wahre, wirkliche, oder aber die alterirte, die durch die neue Definition eingeführte *Zeit*. Ist das Letztere der Fall, so kann man nichts dawider haben, der Satz ist eine Tautologie, und es war vor auszusehen, dass eine solche Definition dahin führen würde; will man aber die *Zeit* im gewöhnlichen Sinne als wirkliche *Zeit* verstehen, und dasjenige Object bezeichnen, was alle Welt durch das Wort *Zeit* bezeichnet, dann muss man widersprechen, dass diese *Zeit* die Bewegung eines erschaffenen Dinges sei. Denn dann ist dieser Ausspruch nicht mehr eine willkürliche Definition, sondern ein Lehrsatz, der bewiesen werden soll, und den man nicht geneigt ist, als blosser Definition und ohne Beweis hinzunehmen. Kann man diesen Lehrsatz nicht beweisen, so werde er als Princip oder Axiom hingestellt, aber nimmermehr als Definition. Man gestehe entweder offen ein, dass man den Satz nicht beweisen könne, oder man suche den Beweis zu geben; aber unwürdig ist es, unter dem Deckmantel einer willkürlichen Definition die Zustimmung erschlei-

chen, und den Verstand des Zustimmenden binden zu wollen, wo man ihn frei machen sollte. Lieber suche man die Zustimmung unter dem Vorwande eines Axioms freiwillig zu erhalten, oder sie durch einen Beweis zu erzwingen, denn diess wird den Verstand nicht binden, sondern frei machen. Kann man aber den Beweis nicht führen, so wird man sich Bedenklichkeiten, Zweifel und Widersprüche aller Art gefallen lassen müssen. Nicht die Definitionen, sondern die Axiome und Beweise vermögen es, die Natur eines Gegenstandes zu bestimmen.

Diess ist die reichste Quelle von Irrthümern und Verwirrungen, und man kann nicht genug in diesen Geist der Genauigkeit eindringen, um sicher zu sein vor den Irrwegen der Wissenschaft. Wie Viele giebt es nicht, die da glauben, dass sie die wirkliche Zeit, wie sie alle Welt versteht, definirt haben, wenn sie selbe z. B. die Bewegung eines erschaffenen Dinges genannt haben? Und doch haben sie nur einen Lehrsatz aufgestellt, und sind den Beweis schuldig geblieben.“

Man sucht durch die Definition die Gegenstände so festzustellen, dass sie die ganze Wissenschaft hindurch erhalten und vor Verwechslung mit andern Gegenständen bewahrt werden. Diess leistet aber genau schon die Sprache ohne alle Definition. Man übersieht es, man vergisst, dass es überhaupt eine Sprache gebe, man will das, was die Sprache natürlich leistet, der Definition künstlich aufbürden, man quält sich und Andere, und macht keinen Fortschritt in der Wissenschaft.

Freilich stellt die Sprache den Gegenstand als unerkannten Gegenstand, a's Problem fest, und die Definition will ihn als Erkenntniss feststellen; aber mit dem blossen Willen ist es nicht gethan, man muss die Mittel dazu haben. Diese Mittel sind die Axiome und Beweise; durch blosse Definitionen wird das Kunststück nicht gelingen können.

Die Sprache leistet das für die Gegenstände in ihrer Ganzheit, was die Definition für die künstlich gebildeten Gegenstände der Wissenschaft leistet. Die Definition hat daher alle Vorzüge

und Einschränkungen der allgemeinen Sprache. Sie definirt eigentlich nur die künstliche Verbindung der Begriffe, nicht aber den Gegenstand selbst; Verbindung der Begriffe ist aber eine Thätigkeit des Denkens, und so definirt die Definition in Wahrheit nur das Denken, sie stellt nicht den Gegenstand, sondern das Denken fest, damit es nicht schwankend und unstät werde, sondern an derselben Verbindung der Ideen, an demselben Denken festhalte.

Dass man anfangs die Gegenstände bestimmen will, statt das Denken zu bestimmen, hat seinen Grund in einer gewissen Scheu vor bestimmtem und scharfem Denken. Man glaubt, dass in der Logik das Denken und in andern Wissenschaften die Gegenstände bestimmt werden, und dass es damit gethan sei. Diess ist ein Irrthum; denn in jeder Wissenschaft ist das bestimmte Denken das Nothwendigste, am Anfange, wie am Ende.

Es hat fast den Anschein, als ob man glaubte, in den Gegenständen sei dasjenige zu erkennen, was in ihnen gar nicht gedacht wird. Diess ist so sehr falsch, dass das Gegentheil davon fast eine identische Wahrheit ist. Denn das Denken kann nur wieder das zu Erkennende, das Gedachte, erkennen, nicht aber dasjenige, was in keiner Weise gedacht worden ist.

Was ist daher das in den Dingen zu Erkennende? Die Antwort auf diese Frage wird sehr verschieden ausfallen, je nachdem man sie am Anfange oder am Ende der Wissenschaft aussprechen will. Am Ende der vollkommenen Wissenschaft wird in den Dingen Alles erkannt werden können. Aber am Anfange wird nur Dasjenige zu erkennen sein, in welchem die Spuren des Denkens am Auffallendsten hervortreten und gleichsam zu Tage liegen. Diese Spuren sind aber die Wahrnehmungen, die durch *unser* Denken gesetzten Verbindungen der Begriffe. Die Begriffe selbst, die Objecte sind das anfangs Unerkannte, und bleiben auch das Unerkannte, wenn nicht in der Erkenntniss, in der Verbindung des Denkens, fortgegangen wird, bis sich endlich die Begriffe selbst als solche Verbindungen, als Gedanken

darstellen werden. Wird dieser Weg betreten, dann werden auch die Gegenstände erkannt werden; wird er aber nicht betreten, wird nicht einmal geahnt, dass die Verbindungen der Begriffe das allein und wahrhaft zu Erkennende seien, dann werden auch die Begriffe und Gegenstände ganz gewiss das ewig Unerkannte bleiben.

Es ist daher ein Hauptsatz der Methode, dass das Denken mit der Ganzheit des Gegenstandes nicht beginnen könne. Die Ganzheit wird durch die Sprache festgehalten, und diess ist hinreichend zur Erlangung eines ersten Zieles; aber das Denken ist von der blossen Sprache unterschieden, es beginnt mit einzelnen sicheren Spuren der Verbindungen der Begriffe, also mit einzelnen Sätzen und mit einzelnen Erfahrungen. Alle Erfahrungen sind anfangs blosse Verbindungen von Begriffen (als unerkannten Objecten der Erkenntniss). Das Denken erkennt diese Verbindungen, obgleich die verbundenen Begriffe noch unerkannt sind, und als Probleme für die weitere Forschung aufbewahrt werden. Es müssen daher Sprache und Erkenntniss auf das allerschärfste unterschieden werden. Die Realdefinitionen vermengen beides, sie wollen den Gegenstand sogleich in seiner Ganzheit und in seiner Erkenntniss haben. Wir trennen beides; denn die Erkenntniss wird nicht wie die Sprache in einem Wurf vollendet sein, sie wird in einem fortschreitenden Prozesse des Wissens bestehen, und darum von einzelnen bemerkbaren Spuren, von den Verbindungen, beginnen, und fortfahren, bis sie endlich auch die in diesen Verbindungen enthaltenen Begriffe und Gegenstände zu erkennen im Stande sein wird.

Diess ist aber genau der Weg der Natur. Vor jeder wissenschaftlichen Erkenntniss ist schon eine natürliche Erkenntniss vorhanden, die Wissenschaft ist nicht etwas völlig Neues, sie ist nur die Veredlung der wildwachsenden Erkenntniss, und verhält sich zu ihr, wie der edle Oelbaum zu dem wilden Oelbaume. Diess Wildwachsende in der Erkenntniss aufzufinden, ist Aufgabe der Metaphysik. Sie muss die Bedingungen des

natürlichen Erkennens finden und feststellen. Und auch das wissenschaftliche Erkennen wird keine anderen Bedingungen haben können, als das natürliche Erkennen hat. So finden wir z. B., dass aus den Verbindungen mehrerer Linien neue Verbindungen hervorgehen, die uns überraschen, dass die Linien und Winkel sich gegenseitig bestimmen, dass die Linien nach sicheren Regeln getheilt werden können, dass die Flächen und Körper bestimmte Eigenschaften haben, die von den Linien abhängen u. s. w. Wollte nun Jemand sagen: Alles dieses ist Nichts, wenn ich nicht zuerst die erkenntnissgebende Definition des Raumes habe, so habe ich keine Wissenschaft, ich will sie nicht — was wäre ihm zu antworten, als dass er sie auch nicht erlangen werde, da er den Weg der Natur nicht betreten wolle.

Oder wir bemerken die Eigenschaften der Pflanzen, in denen sie übereinstimmen, und diese Uebereinstimmung überrascht uns. Wir haben einen sicheren Anhaltspunkt: Pflanzen, die von derselben Pflanze abstammen, haben übereinstimmende Eigenschaften. Diese Eigenschaften werden untersucht. Wir finden, dass sie auch solchen Pflanzen zukommen, von denen man nicht weiss, dass sie von derselben Pflanze abstammen. Werden aus diesen wesentlichen Eigenschaften die Kriterien der Gleichartigkeit aufgestellt, ohne Rücksicht auf gleiche Abstammung, so wird man diesen Begriff der Gleichartigkeit sogar in den Mineralien finden, von denen man ganz gewiss weiss, dass sie nicht von einander abstammen. — Auch hier wird der Weg der Natur betreten, und die Wissenschaft begonnen, wenn man auch anfangs nicht im Stande sein sollte, die erkenntnissgebende Definition der Pflanze zu finden. Was die natürliche Erkenntniss Gutes hat, wird angenommen und bewahrt, was sie Mangelhaftes, gleichsam Wildwachsendes hat, wird veredelt. Jede Wahrnehmung aber, auch die einfachste Erfahrung, ist schon eine Verbindung von Begriffen; hier sind die ersten, natürlichen Spuren der Erkenntniss gegeben. Die Verbindungen werden erkannt, das Verbundene bleibt aber vorerst Problem.

Das Mangelhafte der wildwachsenden Erkenntniss ist die Zerstreuung ihrer Resultate, die Unachtsamkeit auf ihre Uebereinstimmung. Man sammelt daher in der Wissenschaft die zusammengehörigen Erkenntnisse, z. B. die Lehren von den räumlichen Grössen und ihren Eigenschaften, man ordnet sie, sucht diejenigen Sätze, die in andern enthalten sind, stellt sie heraus; zeigt den nothwendigen Zusammenhang mehrerer Sätze, und sucht endlich einen ersten Satz, durch den sie alle bewiesen werden können. Den Beweis, die Nothwendigkeit und Sicherheit der Erkenntniss giebt die Wissenschaft, den Grund der Erkenntniss aber giebt die Natur. Ein Grund, der nicht natürlich gelegt ist, kann auch nicht künstlich gelegt werden.

Dieser Weg der Natur deckt den Hergang des Denkens auf, er zeigt, dass wir anfänglich nur das Gedachte, das als Verbindung der Begriffe Wahrgenommene, erkennen, nicht aber die verbundenen Begriffe und die Dinge selbst. In der erkenntnissgebenden Definition wird diess verwechselt; der Definirende meint, dass er durch seine Definition den Gegenstand selbst habe; er hat ihn aber nicht als Gegenstand, er hat ihn alterirt, und in ein Gebilde seines Denkens umgewandelt; der Nicht-Definirende weiss aber, dass er den Gegenstand selbst habe, jedoch als unerkannten Gegenstand, den er um jeden Preis erkennen möchte, und den er sich nicht getraut, nach Belieben zu verändern. Gerade der Nicht-Definirende hat eine Veranlassung, in seiner Wissenschaft fortzuschreiten, der Definirende hat diese Veranlassung nicht, er hat ja schon Alles in seiner Definition erkannt.

Es ist ganz klar und einleuchtend, dass niemals ein wahrer Fortschritt in irgend einer Wissenschaft möglich sein werde, wenn nicht die Real-Definitionen vollständig und entschieden aufgegeben und verworfen, wenn sie nicht dahin gestellt werden, wohin sie gehören, nämlich zu den Lehrsätzen und Beweisen. So hat es die Mathematik gemacht, die nur Nominal-Definitionen kennt und unterscheidet.

Man wird vielleicht einwenden, dass auf diese Art immer etwas Unerkanntes in der Erkenntniss sein werde. Diess sagen wir auch. Der Gegenstand wird anfangs ganz unerkannt, ganz Problem sein. In der Erkenntniss darf etwas unerkannt oder dunkel sein. Aber was ist dieses Etwas? Vielleicht die Verbindung der Begriffe, die Art und Weise, wie sie vereinigt werden, das Erkennen, das Subjective? Diess sei ferne; dieses muss ganz und gar erkannt sein. Aber die verbundenen Begriffe dürfen anfangs unerkannt sein, die Gegenstände; denn diese sollen erst erkannt werden. Z. B. es soll die Kugeloberfläche durch ein Quadrat gemessen werden. Man findet, dass dieses Quadrat $4r^2\pi$ mal in der Kugeloberfläche enthalten ist. Das Verbindende, das Subjective, die Operation, $4r^2\pi$, muss erkannt werden, diess ist die Hauptsache, um die es zu thun ist, das messende Quadrat, der Begriff kann immer noch unerkannt sein, und der weiteren Forschung aufbewahrt werden. Es ist dennoch eine Erkenntniss gewonnen worden, es ist die eine von den zwei gegebenen unbekannten Flächen (Quadrat und Kugeloberfläche) durch die andere erkannt, und die andere der ferneren Forschung aufbewahrt worden.

Die Wissenschaft muss also ihre Operationen, ihre Verbindungen zuerst erkennen und definiren, nicht aber die Gegenstände. Und wenn Jemand einwendet, dass er auf diesem Wege (des bestimmten Denkens) nicht in die Wissenschaft eingehen wolle, so werden wir ihn fragen dürfen, ob er etwa Hoffnung habe, dass er auf einem andern, als auf dem rechten Wege, zur Wissenschaft gelangen könne. Es führt ja zur Wissenschaft, wie überhaupt zu allen Gütern des Geistes, nur ein einziger Weg, *der Weg der Vorbereitung, dass wir ihrer würdig werden mögen.*

Es ist sehr leicht begreiflich, wie so grossartige Missverständnisse, wie die Real-Definitionen sind, so lange Zeit herrschen konnten, und fort und fort herrschen können. Man hat nämlich schon am Anfange der Wissenschaft die Aufgabe,

dass man die Wesenheit der Dinge erkennen soll. Nun kommen die Vorurtheile. Erstes Vorurtheil: Man darf nichts Un-erkanntes in die Erkenntniss aufnehmen. Auflösung: Allerdings, die Erkenntniss, das Erkennen, das Denken selbst darf nicht unbestimmt und unerkannt sein, aber die in der Erkenntniss verbundenen Begriffe dürfen anfangs noch unerkannt sein. Zweites Vorurtheil: Wir sollen den Gegenstand sogleich ganz erkennen, denn es liegt nicht in unserer Macht, das zu trennen, was die Natur vereinigt hat. Auflösung: Ja wohl. Wir nehmen auch den Gegenstand in seiner Ganzheit. Wir öffnen die Augen und sehen, dass wir ihn als solchen in der *Sprache* haben, und die ganze Wissenschaft hindurch bewahren können. Drittes Vorurtheil: Die Wesenheit ist die Hauptsache. Auflösung: Allerdings, wenn wir im Erkennen geübt und erprobt sind. Wenn wir aber im Anfange den Nachdruck auf die Wesenheit legen, und das Erkennen übersehen, dann wird die Wesenheit gewiss auch das Uebersehene und Unerkannte bleiben. Anfangs ist der Nachdruck auf das Erkennen zu legen. Diess ist eben so gut wesentlich, wie die Wesenheit der Dinge selbst. Viertes Vorurtheil: Die Wissenschaft darf nicht etwas bloss Subjectives werden. Auflösung: Nein, diess darf sie auch nicht werden, und am allerwenigsten ein blosses Spiel. Aber dadurch allein, dass man ausruft: Objectivität! Objectivität! bleibt sie auch nicht schon objectiv. Die Unterscheidung des Subjectiven und Objectiven ist besser, als ihre Nichtunterscheidung. Das Erkennen ist subjectiv, und wenn man glaubt, dass das Erkennen objectiv sei, so werden die Dinge gerade dadurch subjectiv gemacht.

Darum wird auch die wahre Wissenschaft die Dinge anfangs als unerkannte Dinge nehmen, und wird ihre Freude an ihnen haben, bis sie endlich dieselben erkennen, und an die Stelle, welche die unerkannten Gegenstände in der Wirklichkeit eingenommen haben, als Erkenntnisse einsetzen, und als objective Wahrheiten offenbaren kann. Mittlerweile werden wir allerdings das Subjective auf uns nehmen müssen, diess schadet nichts,

wir sollen die Titanen-Macht und die Titanen-Nacht in uns kennen lernen.

Wenn alles in einem Gegenstande Enthaltene begriffen werden soll, so ist einleuchtend, dass diess nicht am Anfange, sondern am Ende einer Wissenschaft geschehen könne, denn die Wissenschaft wird eben darum begonnen, damit man diess endlich einsehen lerne; wüsste man diess Alles schon am Anfange, so wäre die Wissenschaft überflüssig. Beginnt man aber mit einzelnen Momenten des ganzen Gegenstandes, um sie der Reihe nach zu versuchen und zu prüfen, will man das Einzelne erst erkennen, um aus ihm das Ganze kennen zu lernen, so trennt man allerdings, was wirklich und sprachlich vereinigt ist, man abstrahirt von Anderem, indem man Fines oder Mehreres heraushebt, und der so modificirte Gegenstand, der schon durch das erste corrosive Eingreifen der Wissenschaft verändert wird, findet sich nicht mehr oder nur zufällig in der Sprache, und muss jedenfalls durch die wissenschaftliche Operation, durch die er gebildet worden ist, erklärt und definirt werden. Der Kürze und Deutlichkeit willen wird ihm ein besonderer Name gegeben, der den Worten der natürlichen Sprache gegenüber ein wissenschaftlicher Kunsta Ausdruck genannt wird.

Den Unterschied zwischen diesen wahren Definitionen und den wahren Lehrsätzen wollen wir an einem Beispiele herausstellen und anschaulich machen. Definition: Alle Zahlen, die durch 2 theilbar sind, werden *gerade* Zahlen genannt. Lehrsatz: Alle Zahlen, die durch 2 theilbar sind, haben eine Ziffer an der Einheiten-Stelle, die selbst durch 2 theilbar ist. — Die Definition ist also nur ein entzweigebrochener, halber Lehrsatz. Man nimmt die eine Hälfte eines Lehrsatzes und giebt ihr einen eigenen Namen, damit der ganze Lehrsatz einfacher und kürzer wird: alle geraden Zahlen haben eine Einheits-Ziffer, die selbst durch 2 theilbar ist. Man hätte auch die andere Hälfte des Lehrsatzes nehmen und definiren können: Alle Zahlen, deren Einheits-Ziffer durch 2 theilbar ist, werden

gerade Zahlen genannt; und dann würde der Lehrsatz lauten: Alle geraden Zahlen sind durch 2 theilbar. — In jedem Lehrsatz werden zwei Begriffe so verbunden, dass der eine durch den andern erklärt und bewiesen werde; diess ist Alles. Aber in der Definition wird nicht Anderes durch Anderes erklärt und bewiesen. Es wird das bereits Erklärte und Verbundene herausgestellt und durch einen eigenen Namen ausgezeichnet. Und selbst den Lehrsätzen giebt man künstliche Namen; man kennt einen pythagoräischen, binomischen Lehrsatz u. s. w. So wie sich nun die Benennung eines Lehrsatzes zum vorausgehenden Beweise dieses Lehrsatzes verhält, nämlich als etwas höchst Gleichgültiges und Unbedeutendes, gerade so verhält sich der künstliche Name einer Definition (*gerade Zahl*) zu der ihm vorausgehenden Vereinigung der Begriffe (*Zahlen durch 2 theilbar*). Diese vorausgehende Vereinigung der Begriffe ist das Wichtigste in der Definition, nicht der Name, und wenn in einer Wissenschaft gut definirt wird, so ist es ein Zeichen, dass viele Begriffe gut verbunden worden seien, dass in dieser Wissenschaft bereits zu einem guten d. h. bestimmten Denken vorgedrungen worden sei. Um dieses ist es zu thun, nicht um die Namen, die immerhin gleichgültig sein können.

Wenn aber die Verbindung der Begriffe, das Denken, die Operation, definirt werden soll, so wird diess aus dem Hergange des Denkens selbst geschehen müssen. Wendet man in einer neuen Operation eine frühere an, wird eine frühere Operation in eine spätere, einfachere zusammengezogen, so wird diese spätere Operation aus der frühern definirt. Wie soll aber die erste Operation definirt werden? Aus andern Operationen kann sie nicht definirt werden, sie wird daher, da alles Denken ein Verbinden von Begriffen, und alles bestimmte Denken einer besondern Wissenschaft ein bestimmtes Verbinden von Begriffen ist, durch diese bestimmte Verbindung schlechthin definirt werden müssen. Und diese bestimmte Verbindung schlechthin muss im natürlichen Erkennen gegeben sein.

Gesetzt die erste bestimmte Verbindung des mathematischen Denkens sei die Verbindung durch Addition, und gesetzt, die Mathematik kenne keine ihr vorausgehende Metaphysik, aus der sie etwas entlehnen könne, so muss sie diess erste Denken durch Addition vorerst haben, ehe sie es definiren kann; es muss die Definition aus der Addition hervorgehen, nicht umgekehrt, die Addition aus der Definition. Jeder, der die Mathematik für sich findet, muss zuerst die Addition gefunden haben, denn sonst hat er auch die Mathematik nicht gefunden. Alle, die in der Mathematik unterrichtet werden, müssen zuerst in der Addition unterrichtet werden, sie müssen sie so erkannt haben, dass sie dieselben nicht mit andern Operationen verwechseln. Diese natürliche Grundlage muss durch die Natur gegeben sein; es darf nicht einmal versucht werden, sie künstlich ersetzen zu wollen.

Es wird daher untersucht werden müssen, was durch die Addition ausgeführt wird. Man verbindet zwei (oder mehrere) Begriffe auf solche bestimmte Art, dass das verbundene Ganze mit den verbundenen Begriffen (Theilen) gleichartig ist, wo also auch die verbundenen Begriffe als gleichartig vorausgesetzt werden. Diese bestimmte Verbindung wird Addition genannt. Hier ist nichts mehr dunkel, als der Ausdruck gleichartig. Gleichartig sind z. B. Linien und Linien, Flächen und Flächen, Körper und Körper. In der Sprache der Wirklichkeit, und in der Sprache der Zeichnung ist dieser Ausdruck nicht dunkel. In der Zeichnung zeichnet man z. B. aus zwei Flächen eine dritte Fläche, und es ist durch Zeichnung klar, was unter gleichartig verstanden wird. In der Wirklichkeit verbindet man z. B. zwei Theile eines getheilten Körpers zu einem Ganzen, und hier ist durch die Wirklichkeit klar, was unter gleichartig verstanden wird. Das Wort gleichartig ist also mathematisch nur eine Uebersetzung aus dem Reiche der Wirklichkeit oder aus der künstlichen Sprache der Zeichnung, und ist durch diese deutlich. Zeichen ist Zeichen, sei es Zeichnung oder Wort,

das eine macht das andere klar. So macht die Zeichnung das Wort *gleichartig* klar; so macht z. B. das Wort *Zeit* das algebraische Zeichen a klar, wenn in irgend einem Probleme die Zeit durch a übersetzt wird.

Das Ganze ist mehr eine Schwierigkeit der Axiome als der Definitionen. Die Axiome haben die ersten Operationen (das erste bestimmte Denken) einer Wissenschaft festzustellen, sie haben z. B. in der Mathematik die Addition hervorzubringen; sind diese Operationen hervorgebracht, so werden sie benannt, und werden genau nach dem Hergange des Denkens, durch welchen sie hervorgebracht worden sind, definirt.

Die nachfolgenden Operationen sind dann aus der ersten Operation z. B. aus der Addition zu definiren, denn da die Einheit einer Wissenschaft darin besteht, dass in ihr nur auf eine einzige und bestimmte Art gedacht wird, so kann z. B. in der Mathematik nichts enthalten sein, was nicht auf die Addition zurückgebracht werden könnte, wenn die Addition wirklich die natürliche Operation des mathematischen Denkens ist. Die übrigen Operationen werden auch Additionen sein, aber auf bestimmte Art veränderte, zusammengezogene, abgekürzte Additionen. So ist die Multiplication eine Addition gleicher Grössen, also auf's Leichteste definirbar aus der Addition. Das Gleiche gilt auch von allen übrigen Operationen.

Vor Allem ist aber herauszuheben, dass die Definition nicht die Dinge, sondern die Verbindungen und das Denken zu definiren habe. Diess allein bringt Klarheit. Denn nicht die *Dinge* sollen wir anfangs klar machen, sondern *uns* sollen wir klar machen über die Dinge.

Wie aber, wenn Jemand am Anfange einer Wissenschaft diese selbst definiren will, und keine andere Wissenschaft voraussetzt, aus welcher er sie definiren kann, wie soll er es beginnen? Definirt man z. B. die mathematische Analysis „als die Wissenschaft der Gegensätze und Beziehungen, in denen die sieben Operationen, Summen, Differenzen, Producte, Quo-

tienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen in ihren allgemeinsten Bedeutungen zu einander stehen“, so wird diess eine ziemlich bunte Definition sein. Es ist mehr ein Versprechen, dass man das Gesagte (deutlich und) wahr machen wolle. Mit einem Versprechen darf Jeder beginnen, wenn er Wort halten kann. Aristoteles sagt, dass am Anfange der Lehrende nur versprechen, und der Lernende nur glauben könne. Nennt man diess eine Definition, was sie erst am Ende der Wissenschaft sein kann, wenn schon alle einzelnen Operationen verstanden sind, so mag es hingehen, da man doch mit irgend Etwas beginnen muss. Es ist unschädlich. Natürlicher wird es jedoch immerhin sein, zu erklären, dass man eine Wissenschaft suche, die durch dieses oder jenes Axiom beherrscht werde, und dass man dann sogleich mit dem Axiome selbst beginne.

Werden aber die Definitionen so gegeben, wie sie gegeben werden sollen, so legen sie Zeugniß ab für die Fortschritte einer Wissenschaft. Nur eine Wissenschaft, die zu bestimmtem Denken vorgedrungen ist, kann auf die rechte Art Definitionen geben. Das Denken müsste auch anfangs unter der Last der Worte erliegen, wenn nicht Kunstaussdrücke eingeführt würden. Werden aber durch die Definitionen für viele Worte und Bestimmungen neue Worte eingeführt, die sprachlich eben so einfach sind, wie die ursprünglichen Worte der Sprache, so erscheinen in den spätern Zusammensetzungen diese Kunstaussdrücke nicht als Zusammensetzungen von Worten (diese sind vermieden), sondern als Zusammensetzungen von Erkenntnissen, an denen Niemand schwer trägt, und die alle ferneren Erkenntnisse nicht erschweren, sondern erleichtern werden.

Die Wissenschaft muss sich und ihre Operationen definiren, damit sie nicht unbestimmt und wüste werden; in diesen Schranken erkennt sie sich, und in dieser Erkenntniß hat sie ihren Fortschritt. Die Objecte aber sollen wissenschaftlich erkannt, und nicht vor der Wissenschaft und unbewusst durch

eine Definition in irgend etwas umgewandelt werden, was vielleicht himmelweit von ihrem wahren Wesen entfernt ist. Die bestimmten Erklärungen der Wissenschaft müssen geprüft und erkannt, aber die unerkannten Gegenstände müssen unverändert erhalten werden, damit sie nicht durch unzeitige vor-wissenschaftliche Gestaltungen verdorben, und statt wirkliche Gegenstände zu sein, unvermerkt in blosse Gedankendinge verwandelt werden. Folge davon ist, dass alle Wissenschaften, die sich selbst definiren, und den Gegenstand für die Erkenntniss unverändert behalten, wie die Mathematik und die Naturwissenschaften, jede folgende wahre Erkenntniss in den Gegenstand aufnehmen, während umgekehrt alle Wissenschaften, die sich nicht definiren und den Gegenstand durch unzeitige Definitionen umändern, jede folgende Erkenntniss, die nicht schon in der Definition enthalten ist, verwerfen oder umgehen müssen. Sie bleiben das, wozu sie sich am Anfange selbst verdorben haben, und sie kennen keinen wirklichen Fortschritt, der ihnen nur einen unvermeidlichen Untergang bereiten müsste.

So nothwendig aber auch für alle Wissenschaften die Definitionen sind, so wird man sich doch unmöglich viel von ihnen versprechen können. Sie können hie und da einige Unbestimmtheiten berichtigen, hie und da das Denken erleichtern, aber Vieles werden sie niemals leisten, weil sie nicht in ihren Worten den Hergang ihres Wesens an sich tragen, da immer neben dem Worte auch die Definition im Gedächtnisse behalten werden muss. Sie ermüden und lähmen später den kühnen Schritt der Wissenschaft. Definitionen sind für den Anfang, sie sind Krücken und Leitern, die, sie mögen morsch oder stark sein, einen behenden Mann an ein erstes Ziel bringen. Aber das erste Ziel ist nicht schon das letzte Ziel. — Wollte man alle späteren Zusammensetzungen aller wissenschaftlich bestimmten Begriffe definiren, so würde man bald eine grosse Zahl von Worten erhalten, die man alle mit ihren Definitionen merken müsste, weil die Namen willkührlich gegeben sind, und

nichts an sich haben, was wesentlich an diese Zusammensetzung dieser ihrer Begriffe erinnern könnte.

Sind die Wissenschaften noch jung, dann kann es hingehen, denn es ist nicht viel zu überschauen. Daher die Lust aller neuen Wissenschaften, recht viele Definitionen aufzustellen. Auch die Mathematik hat es so gemacht, und viele überflüssige Definitionen gegeben, die jetzt zum Theile wieder vergessen sind. Sie hat sogar vielen Curven eigene Namen gegeben. Mit dem Wachstume der Wissenschaft hebt sich diess wieder auf, die Mathematik hütet sich jetzt gar sehr, auch nur z. B. den Curven der dritten Ordnung eigene Namen zu geben, oder die Lehrsätze zu benennen, wie sie den pythagoräischen oder binomischen Lehrsatz u. s. w. benannt hat. Diess würde für sie mehr eine Last als eine Erleichterung sein. Man unterscheidet lieber die Lehrsätze nach Zahlen, und muss man sich ihrer bei einem neuen Beweise bedienen, so sagt man: diess folgt aus Lehrsatz XVIII oder XX u. s. w. Man behält das Wesentliche bei, dass man die Verbindung der Begriffe herstellt und bestimmt, und man übergeht das Unwesentliche, die ausdrückliche Benennung der verbundenen Begriffe. So verschwinden im Wachstume der Wissenschaften die Definitionen immer mehr und mehr, statt ihrer treten Lehrsätze ein; jetzt ist der wissenschaftliche Geist erstarkt, man beruft sich bei neuen Beweisen nicht mehr auf einzelne Lehrsätze, sondern auf ganze Abschnitte, und endlich wird Alles der Kraft des Denkens übertragen; es ist bleibende und unverlierbare Erkenntniss. Der Geist ist in der Wissenschaft frei geworden.

Auf diese Art wird man sich einigermaßen helfen können. Aber höchster Wunsch der Wissenschaft wird es immer bleiben, dass man zur Ergänzung der Definitionen und damit man nicht immerfort genöthigt sei, auf Anderes hinzuweisen, wie z. B. auf systematisch verzeichnete Lehrsätze, endlich solche Zeichen gewinne, die auch in ihren Zusammensetzungen einfach bleiben, und die nicht nöthig haben, durch eine neben

ihnen hergehende Erklärung getragen zu werden. Zeichen werden gewünscht, die sich selber tragen und erklären, und die sich in allen Zusammensetzungen erhalten können, die alles Nothwendige und nichts Ueberflüssiges enthalten und darstellen.

Fassen wir die bisherigen Resultate zusammen, so wird mit Nothwendigkeit eingesehen, dass Sprache und Definitionen als wesentlich verschiedene Glieder eines und desselben Ganzen unterschieden werden müssen. Die Sprache giebt die Worte für die Gegenstände in ihrer Ganzheit als Probleme der Untersuchung, aber die Definitionen geben die Namen aus vorhergehender Einsicht und mit dem Grunde dieser Einsicht. Daher sind die Definitionen ihrer Natur nach etwas Zweites. Das Erste kann nur durch die Sprache, nicht aber durch die Definitionen gegeben werden. Ferner führen die Definitionen Ausdrücke für solche Gegenstände ein, die bereits wissenschaftlich abstrahirt oder verbunden worden sind, und sie können, da alle Wissenschaften nur von einzelnen Momenten ausgehen, nicht den ganzen Gegenstand auf einmal umfassen, sondern nur Theile und Momente oder auch Verbindungen derselben; die Worte dafür finden sich gar nicht oder nur zufällig in der gewöhnlichen, von der Wissenschaft unabhängigen Sprache, und darum werden durch die Definitionen Kunstausrücke in die Wissenschaft eingeführt, die aber nur so gelten, wie sie definirt worden sind. Dadurch werden die Erkenntnisse ideal, und ihre Resultate gelten getrennt, nicht von dem gegebenen Objecte, sondern von dem wissenschaftlich abstrahirten Gegenstande, und erst dann, wenn alle einzelnen wissenschaftlich abstrahirten Elemente im Verlaufe und am Ende der Wissenschaft vereinigt werden, gilt ihr allgemeines Resultat von den wirklichen Problemen und Gegenständen.

In Bezug auf die Sprache muss als Hauptsache herausgehoben und wiederholt werden, dass die Worte der Sprache die Gegenstände nicht idealisiren, und sich nicht auf die künstlich oder wissenschaftlich elementarisirten Gegenstände, son-

dern auf die ganzen Gegenstände beziehen. Also gerade dadurch, dass die Sprache keinen Anspruch darauf macht, selbst schon Erkenntniss zu sein, wird die Objectivität der zu erkennenden Gegenstände festgehalten; durch die Worte der Sprache wird nichts vom Gegenstande ausgeschlossen, Alles wird in ihm erhalten; und Alles, was an ihm erkannt wird, kann auch in ihn eingereiht werden. Würden aber statt der Sprache sogleich die wissenschaftlichen Definitionen vorausgesetzt, Gebilde unsers Denkens, die anfangs niemals den ganzen Gegenstand umfassen, so würden wir die Gegenstände niemals in ihrer Ganzheit denken, sondern so, wie wir sie am Anfange zufällig verändert und umgebildet haben würden. Dass die Sprache die Objectivität der Erkenntnisse erhalte, ist das Wichtigste und Preiswürdigste, was sie der Wissenschaft leistet, und was sie ihrem *vorwissenschaftlichen* Ursprunge verdankt; so lange die Menschheit die Sprache nicht verliert, wird immer objective Erkenntniss möglich sein.

Aber durch die Definitionen werden die Gegenstände aus der Wirklichkeit herausgehoben und idealisirt. Dadurch soll erreicht werden, dass ein von jedesmaligen Erfahrungen und Nachweisungen unabhängiges apriorisches Wissen gefunden, dass eine Wissenschaft gewonnen werde, die aus sich selbst aufgebaut und bewiesen, und dennoch mit der Wirklichkeit in Uebereinstimmung gebracht, und als das wahre Wesen der Wirklichkeit erkannt werden könne. Und auch diess ist eine nothwendige Forderung, dass a priori und unabhängig von der jedesmaligen Erfahrung und mit Nothwendigkeit gedacht werde. Soll aber in einer solchen Wissenschaft in Wahrheit a priori vorausgegangen werden können, so sollen wir auch Elemente eines solchen Fortschrittes haben, die wir frei und sicher gebrauchen, mit denen wir gleichsam rechnen können, wie mit den Zahlen der Mathematik. Nun geben zwar die Definitionen nach einer Seite hin wesenhafte Worte, weil sie nach vorausgegangener Erkenntniss ertheilt werden, allein dieses Wesen

der Erkenntniss ist nicht schon in ihnen selbst sichtbar, sondern muss jedesmal aus der Erklärung nachgeholt und gemerkt werden. Schon der Umstand, dass die Erklärungen neben ihnen hergehen müssen, zeigt, dass auf diese Art das Ganze der Erkenntniss nicht vollständig charakterisirt sein könne. Denn wären in den Lauten oder Buchstaben der Definitionen die Erklärungen selbst sichtbar, so dass sie keine anderen Laute oder Buchstaben umfassten, als nur die erklärenden, so brauchte die Erklärung selbst nicht nebenher zu gehen, das ganze Wesen aller vorausgehenden Erkenntnisse müsste in ihnen ausgedrückt sein, und ein nicht bemerklicher Irrthum in ihrem Gebrauche wäre eben so undenkbar, wie ein nicht nachweisbarer Irrthum in den Zahlen-Rechnungen.

Aus dem Wesen der Sprache geht hervor, dass solche elementarisirte Hilfsmittel der Erkenntniss in der Sprache nicht gefunden werden können, und da die Definitionen die Sprache nur nachahmen, so werden auch die Definitionen diese Hilfsmittel nicht geben können. Diese Hilfsmittel müssen auf eine von der Entstehung der Sprache verschiedene Art gebildet werden; und wenn sie überhaupt möglich sind, werden sie eine wissenschaftliche Zeichensprache sein, und sie werden ganz dasjenige leisten, was in der früher erklärten *wesenhaf-*
ten Sprache dunkel angestrebt, aber nicht erreicht wurde. Wird aber diess als ein eigenes Element ausgeschieden, so wird die Sprache als hohes wesentliches Erkenntniss-Organ auf die rechte Art bestehen, aber auch die Zeichensprache wird als Erkenntniss-Organ auf die rechte Art bestehen können. Die vorausgehende allgemeine Sprache wird die Grundlage sein, auf der sich die nachfolgende Zeichensprache mit Freiheit und Sicherheit bewegen wird.

Sechste Untersuchung.

Ueber die Zeichensprache.

Aus den bisherigen Untersuchungen geht mit Nothwendigkeit hervor, dass die Worte und Definitionen der Sprache unmöglich allen Anforderungen der Wissenschaften genügen können. Es wird ein *solches* Hilfsmittel gesucht, das als wesentliche Sprache des Gedankens den ganzen Hergang des Denkens, und ausser diesem nichts anders darstellen soll. — Die Worte und Definitionen enthalten nämlich Vieles, was nicht zum Gedanken selbst gehört, oder vielmehr Alles, was sie sichtbar und hörbar enthalten, ist für das Denken unwesentlich, alle Buchstaben und Laute haben keine weitere und wesentliche Beziehung zu dem definirten Gegenstande selbst. Der Zusammenhang zwischen den Worten und Gegenständen wird nicht schon unmittelbar durch die Buchstaben und Laute der Worte, sondern durch dasjenige erhalten, was neben und in und ausser diesen Worten ausdrücklich gedacht werden muss.

Es ist daher einleuchtend, dass die wesentliche Sprache der Wissenschaft nicht aus Worten der gewöhnlichen Sprache bestehen könne. Sie wird darum eine Sprache mit *sichtbaren* Zeichen und Symbolen, und mehr eine Schrift als eine Sprache sein. So wie die Mathematik ihre eigenen algebraischen Zeichen hat, gerade so werden die andern Grund-Wissenschaften der menschlichen Erkenntniss ihre eigenthümlichen analytischen Zeichen haben müssen.

Da die Meisten von Furcht befallen werden, wenn sie hören, dass die Zeichen, die jeden Unberufenen und Uneingeweihten vom Heiligthume der Wissenschaften zurückschrecken, nicht bloss in der Mathematik, sondern auch in den andern Wissenschaften gelten sollen, so wird ausdrücklich erinnert, dass die Zeichen keineswegs unbedingt nothwendig seien, und dass, wer eine Wissenschaft ohne Zeichen hat, sie auch ohne Zeichen behalten könne.

Dass eine Wissenschaft ohne Zeichen möglich sei, zeigt schon die Mathematik der Alten, die wohl Zeichnungen der Figuren und Zahlenzeichen, aber keine eigentlichen analytischen Operationszeichen gekannt haben. Die Zeichen sind nicht in *der* Art nothwendig, dass ohne sie gar keine Wissenschaft bestehen könnte; sie sind nur in *freier Art* nothwendig für Jeden, der es in der Wissenschaft weiter bringen, der die Wissenschaft selber fördern will. *Leibniz* sagt hierüber mit Recht: „Jedes menschliche Denken wird erst in gewissen Zeichen oder Charakteren *vollendet*. Denn nicht nur nicht die Dinge selbst, sondern auch nicht ihre Begriffe und Definitionen können immer im Denken bestimmt auseinander gehalten und beobachtet werden; es ist aber auch nicht nothwendig. Man führt der Kürze halber bestimmte Zeichen ein, die das leisten, was die Definitionen nicht leisten können. Wäre ein Mathematiker genöthigt, wenn er eine Parabel, Spirale oder Quadratrix in seinem Beweise brauchte, alle ihre Definitionen und die Definitionen der für sie gebrauchten Ausdrücke immerfort im Geiste gegenwärtig zu haben (wie diess bei blossen Definitionen nothwendig wäre), so würde er nur äusserst langsam vorwärts schreiten, und nur schwer zu neuen Entdeckungen kommen können. Dasselbe würde gelten, wenn er während einer Rechnung alle die Mengen der Einheiten, die in den Ziffern ausgedrückt sind, immerfort auseinander setzen und gleichsam durch eben so viele Steinchen darstellen wollte. Welche grossen Rechnungen würde er ausführen können? Er hat aber Zeichen und Ziffern, die ihm

eben so sichere Resultate geben, wie die Rechenpfennige, aber mit welchen Abkürzungen und mit welchen Erleichterungen?“

Leibniz war der Einzige unter den Neueren, der auf die allgemeine Einführung der Symbole gedrungen hat. Er steht ganz allein in diesen abstractesten Untersuchungen über die Elementarisirung und Feststellung der einzelnen Denk-Operationen; und Fragen, die er zuerst angeregt hat, sind bis jetzt ohne alle Wiederaufnahme, ohne alle Lösung geblieben.

Welches sind aber die grossen Erwartungen und Hoffnungen, die er an die Einführung allgemeiner Symbole geknüpft hat? Seine Worte sind ¹⁾: „Die Adamitische Sprache (die centrale, wesenhafte) ist uns gewiss unbekannt (und auch unmöglich, wie bewiesen worden ist), und die gewöhnlichen Sprachen sind zwar mächtige Hilfsmittel des Denkens, aber sie enthalten nichts, was auf eine wesenhafte Erkenntniss hinwiese, sie sind vielen Zweideutigkeiten unterworfen, und können das nicht leisten, was der Calcul leistet, dass nämlich die Irrthümer des Denkens aus der Bildung und Verbindung der Worte selbst entdeckt werden könnten, wie etwa die Barbarismen der Sprache. Diese wahrhaft grosse und bewunderungswürdige Wohthat gewähren bis jetzt einzig die arithmetischen und algebraischen Zeichen, die nicht Zeichen der Worte, sondern des Denkens sind, so dass sich ein Irrthum des Denkens schon als Irrthum des Calculs darstellt, und nicht erst durch neues Denken entdeckt und berichtigt zu werden braucht.“

„Schon lange war es mir klar, dass alle menschlichen Gedanken auf sehr wenige ursprüngliche Gedanken zurückgeführt werden können. Würden aber diese ursprünglichen Gedanken mit Charakteren bezeichnet, so würden daraus die Charaktere der abgeleiteten Begriffe hergestellt, und alle ihre Elemente, d.h. die in ihnen enthaltenen ursprünglichen Begriffe,

¹⁾ Fundamenta Calculi Ratiocinatoris, Fragm. XVIII, Edit. Erdm.

ihren Definitionen und ihrem Werthe, so wie ihren aus den Definitionen beweisbaren Eigenschaften nach mit Leichtigkeit gefunden werden können.“

„Wäre diess einmal geleistet, so würde Niemand, der in diesen Zeichen dächte, jemals irren können, oder wenn er irrte, so müsste sich sein Irrthum durch die leichtesten Proben auffinden und berichtigen lassen. Ueberdiess würde Jeder mit Sicherheit erkennen, in wie weit sich aus dem Gegebenen neue Wahrheiten folgern liessen; er würde also auch einsehen, wo das Gegebene zur Auffindung des Gesuchten nicht hinreichte, und welche neue Versuche und Begriffe nöthig wären, damit die gesuchten Wahrheiten gefunden werden könnten. Alle Sophismen und Irrthümer würden nichts anders sein, als Fehler des Calculs, und sie würden sich eben so leicht aufdecken lassen, wie die Barbarismen einer Sprache. Diese Kunst, unterstützt durch ununterbrochene Beweisführung und durch klaren Calcul, würde das wahrhaft allgemeine Organ aller menschlichen Wissenschaften sein.“

„Ich behaupte, dass es sich a priori beweisen lasse, dass es eine solche Wissenschaft und Kunst geben müsse, obschon ich sehr wohl einsehe, dass die Menschen, die sich nicht über das Gewöhnliche erheben können, solche Beweise nur nach ihren Erfolgen beurtheilen zu müssen glauben. Würde uns aber diese Wissenschaft oder Kunst auch von einem höheren Geiste gelehrt werden, jedoch aus solchen Prinzipien oder Wahrheiten, die wir schon haben, oder überhaupt begreifen können, so sage ich, dass wir jene Kunst auch aus uns selber hätten finden können, wenn wir nur daran gedacht haben würden, sie zu suchen. Der Grund davon ist, dass uns auch ein Engel nichts beweisen kann, ausser wenn wir die Elemente dieser Beweise zu verstehen im Stande sind. Verstehen wir aber die Elemente dieser Beweise, so können wir sie auch durch die Anwendung der rechten Methode selbst finden, indem wir aus jedem Vorhergehenden das Nachfolgende, was schon

mit bestimmt, aber noch nicht mit herausgestellt ist, ableiten und herausstellen.“

„Diese allgemeine Wissenschaft, ich gestehe es, ist noch von Niemanden gelehrt, und, wie ich glaube, auch noch von Niemanden erkannt worden; auch ich kann nur Anfangsgründe mittheilen, aber doch solche, aus denen sich mit Sicherheit erkennen lässt, dass die verborgenen Gesetze dieser Wissenschaft nicht allzuschwer aufzufinden seien. Sie ist unter uns, diese ewige Wissenschaft und Wahrheit, gerade so wie das wilde Getreide unter den Menschen war, ehe es erkannt und der Cultur unterthan gemacht worden war.“

Diese Entwürfe, von so grossen Erwartungen getragen, sind blosse Entwürfe geblieben; es sind nur wenige Proben dieses allgemeinen Calculs vorhanden, die aber doch hinreichend sind, zu zeigen, was durch sie wahrhaft beabsichtigt und erreicht werden sollte.

Leibniz giebt im Fragment XIX ²⁾ die Anfangsgründe dieser gesuchten Wissenschaft.

Versuch eines allgemeinen Calculs.

Erste Definition. *Dieselben* Objecte sind solche, die unbeschadet der Wahrheit, für einander substituirt werden können. — Er seien z. B. zwei Objecte, a und b, und a sei in einem wahren Satze enthalten, und es zeige sich, dass wenn b statt a gesetzt werde, ein neuer und ebenfalls wahrer Satz hervorgehe, und dass diess immer und allgemein der Fall sei, so sind a und b *dieselben* Objecte. Und umgekehrt, wenn a und b dieselben Objecte sind, so muss eine solche Substitution des Einen für das Andere jedesmal statt finden können.

²⁾ Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Edit. Erdm. pag. 94—98.

Zweite Definition. *Verschiedene* Objecte sind solche, die nicht dieselben sind, oder die nicht in allen Fällen für einander substituirt werden können.

Erstes Zeichen. $a \infty b$ drückt aus, dass a und b *dieselben* Objecte seien.

Zweites Zeichen. a nicht ∞b drückt aus, dass a und b *verschiedene* Objecte seien.

Drittes Zeichen. $a + b \infty m$ drückt aus, dass a oder b in m enthalten sei.

Anmerkung. Obgleich a und b etwas Gemeinschaftliches haben können, so dass beide zugleich genommen grösser sein können als m , so ist doch m grösser als jedes der einzelnen Objecte a und b , und es findet das Gesagte darauf seine Anwendung.

Erstes Axiom. Wenn dasselbe zu sich selber genommen wird, so entsteht nichts Neues, oder $a + a \infty a$.

Anmerkung. In den Zahlen zwar ist $4 + 4 = 8$, oder es geben 4 Gulden zu 4 Gulden addirt 8 Gulden, aber diess ist nur dann der Fall, wenn die 4 addirten Gulden andere sind, als die 4, zu welchen sie addirt werden; wären sie aber dieselben, so würden sie die nämlichen 4 Gulden bleiben und nicht 8 Gulden werden. Man wird nicht 4 Gulden in 8 Gulden, 10 Gulden in 20 Gulden dadurch verwandeln können, dass man sie zweimal zählt.

Zweites Axiom. Wenn dasselbe gesetzt und wieder weggenommen wird, so wird dadurch in Bezug auf Anderes keine Veränderung hervorgebracht. (Si idem ponitur et detrahitur, quidquid inde in alio constituitur, coincidit Nihilo).

Erstes Postulat. Mehrere Objecte können zusammen genommen ein einziges Object bilden, so dass, wenn a und b gegeben ist, daraus ein neuer Ausdruck gebildet wird, der durch m bezeichnet werden kann.

Zweites Postulat. Es kann ein Object a von einem Objecte m oder $(a + b)$ weggenommen werden, in dem es

enthalten ist, und der Rest wird wieder ein neues Object ($m - a$) oder b sein.

Erster Lehrsatz. Objecte, die *dieselben* sind mit einem dritten, sind auch unter sich selbst *dieselben*, oder, wenn $a \infty b$ und $b \infty c$, so ist auch $a \infty c$.

Beweis. Wenn in dem gegebenen, wahren, Satze $a \infty b$ statt des Objects b das Object c substituirt wird, was nach der *ersten Definition* erlaubt ist, so geht daraus $a \infty c$ hervor, was zu beweisen war. U. s. w. Es folgen nun 13 Lehrsätze, die aus diesen Definitionen, Axiomen und Postulaten abgeleitet werden.

In den *Zusätzen* zu den *Proben* des allgemeinen Calculs (Fragm. XX) giebt *Leibniz* noch folgende wesentliche Erläuterungen.

„Damit die Natur dieses allgemeinen Calculs deutlicher eingesehen werde, bemerke ich, dass Alles, was in einigen willkürlich angenommenen Zeichen ausgedrückt wird, eben so gut durch beliebige andere Zeichen ausgedrückt werden könne. Wenn ich daher sage, dass der Satz: *ab ist a*, immer wahr sei, so verstehe ich darunter nicht etwa bloss den Satz: das vernünftige Thier ist ein Thier, worin *Thier* durch a und *vernünftig* durch b ausgedrückt wird, sondern auch den Satz: das vernünftige Thier ist vernünftig, worin *vernünftig* durch a und *Thier* durch b ausgedrückt wird. Und diess ist von jedem andern Beispiele so zu verstehen.

„Ein Gesamt-Ausdruck kann durch die Symbole gegeben werden: $a, b, a b, a b c$, u. s. w. wie: Mensch, Thier, vernünftiges Thier, vernünftiges sterbliches Sichtbares u. s. w. Einen allgemein bejahenden Satz bezeichne ich so: a ist b , oder: jeder Mensch ist Thier, und diese Zeichen will ich immer allgemein genommen haben. Das Subject ist a , das Prädikat ist b , und die Copula ist das Wort (warum nicht Zeichen?) *ist*.

„**Postulat.** Es sei erlaubt, vorauszusetzen, dass die Zeichen mit andern Zeichen oder auch mit Zusammensetzungen

anderer Zeichen gleichbedeutend seien, dass sie daher auch für einander gesetzt werden können, z. B. $a b$ und c ; vernünftiges Thier und Mensch. — Diess kann aber nur dann erlaubt sein, wenn in solchen Sätzen nicht ausdrücklich das Gegentheil vorausgesetzt worden ist.

Principien des Calculs. 1) Was allgemein in allgemeinen Zeichen ausgedrückt wird, das kann auch in was immer für andern Zeichen auf dieselbe Art bezeichnet werden. So kann der Satz: $a b$ ist a auch durch den Satz: $b c$ ist b , oder $b c d$ ist $b c$ ersetzt werden, weil durch die Substitution von k statt $b c$ (nach dem Postulat) der Satz $k d$ ist k hervorgeht, der mit: $a b$ ist a übereinstimmt.

2) Die Versetzung der Zeichen in demselben Ausdrucke bringt keine Veränderung, nichts Neues, hervor; $a b$ ist eben so viel wie $b a$, z. B. vernünftiges Thier oder Thier vernünftig, (was sich besser durch *animal rationale* und *rationale animal* geben lässt)

3) Die Wiederholung desselben Zeichens in demselben Ausdrucke ist unnütz, wie z. B.: b ist $a a$, oder: $b b$ ist a ; der Mensch ist Thier Thier, der Mensch Mensch ist Thier. Denn es genügt zu sagen: a ist b , oder der Mensch ist Thier.

4) Aus beliebig vielen Sätzen kann ein neuer Satz gebildet werden, indem alle Subjecte in einem einzigen Subjecte und alle Prädikate in einem einzigen Prädikate gegeben werden. Z. B. a ist b ; c ist d ; e ist f ; daraus wird der neue Satz gebildet: $a c e$ ist $b d f$. Z. B. Gott ist allmächtig, der Mensch ist mit einem Leibe begabt, der Gekreuzigte ist leidend. Der neue Satz ist: der Gekreuzigte Gott Mensch ist allmächtig mit einem Leibe begabt leidend. — Und es macht keinen Unterschied, dass bisweilen die so verbundenen Objecte mit einander unverträglich sind, z. B.: der Cirkel ist unwirklich, das Quadrat ist verwirklicht, also: das Zirkel-Quadrat ist unwirklich verwirklicht. Dieser Satz ist der Form nach wahr, obgleich die Verbindungen unmöglich sind; er enthält nichts Unwahres.

obgleich das, was er enthält, unmöglich ist. (Etwa auch der Satz: Der Zirkel ist wirklich, das Quadrat ist eine Figur, also: Das Zirkel-Quadrat ist eine wirkliche Figur?)“

— Diese Proben und die Zusätze dazu hat *Leibniz* für sich niedergeschrieben. Sie sollten sein grosses Werk über den allgemeinen Calcul einleiten. Es ist aber nicht weiter ausgeführt worden, als in diesen Proben geschehen ist.

Das richtige Verhältniss, das die Critik ihnen gegenüber annehmen kann, ist daher das einer völligen Anerkennung; es kann nur willkommen sein, dass diese Proben niedergeschrieben und erhalten worden sind. Was also über sie gesagt wird, kann nur der Sache selbst gelten; sie müssen untersucht werden, damit endlich klar und entschieden eingesehen werde, was zum wesentlichen Gelingen eines solchen Calculs gehöre, und was hingegen vermieden werden müsse, damit nicht Alles ganz und gar misslinge.

Nach den dargelegten Proben kann nicht zweifelhaft sein, dass *Leibniz* einen allgemeinen, für alle Wissenschaften gültigen Calcul in Vorschlag bringen wollte. Es ist nicht seine Absicht, etwa eine besondere Zeichensprache an die mathematische Zeichensprache nur anzureihen, denn er sagt ausdrücklich, dass der neue Calcul *allgemeiner* und vortrefflicher sein werde, als der mathematische. Auch beginnt dieser Calcul in seinen Proben viel allgemeiner, als es der bloss mathematische Calcul erfordern würde. Vergleicht man aber diese Proben und ihre Zusätze, die nicht aus einem Gusse sind, so fällt augenblicklich auf, dass sie beide von sehr verschiedenen Anlagen seien. Die Proben selbst, obwohl scheinbar, oder der Meinung ihres Urhebers nach, allgemeiner gefasst, haben eine durchaus mathematische Haltung, während der allgemein logische Character der Zusätze gar nicht verkannt werden kann. Wie sich diese doppelte Haltung in einem wahrhaft allgemeinen und dennoch bestimmten Calcul vertragen könne, ohne dass das Eine das Andere ausschliesse; wie

also dieser allgemeine Calcul selbst möglich sei, ist aus den vorhandenen Fragmenten auf keine Weise zu entnehmen.

In der Erklärung des dritten Zeichens. $a + b \infty m$, ist schon das Zeichen (+) ein mathematisches Zeichen, nur wird es unbestimmt gelassen, ob man es für das bloße Additions-Zeichen, oder für etwas Anderes nehmen soll. Ein Zeichen aber, das schon in einer Wissenschaft eine bestimmte Operation ausdrückt, kann nicht für eine andere allgemeine Operation gebraucht werden, denn sonst ist Verwirrung unvermeidlich. Dasselbe gilt von dem gebrauchten Zeichen (—).

Das erste Axiom: dass Dasselbe mit sich selbst genommen nichts Neues bilde, ist ein sonderbares Axiom, und scheint anzudeuten, dass durch das Zeichen (+) ganz und gar keine Operation ausgedrückt werde. Denn in der Mathematik machen $a + a$ wirklich $2a$, und bilden etwas Neues. Wenn *Leibniz* dieses Axiom dadurch erläutert, dass 10 Gulden nicht 20 Gulden werden, wenn man sie zweimal zähle, und nicht 30 Gulden, wenn man sie dreimal zähle, sondern 10 Gulden bleiben, wenn nicht andere 10 oder 20 Gulden hinzukommen; so ist diess ein Scherz, der auch als solcher genommen wird, wenn man den rechten Hergang übersieht. Denn wenn man 10 Gulden gezählt hat, und sie aufs Neue zählen will, so nimmt man von der Summe der gezählten 10 Gulden einen nach dem andern weg, um ihn aufs Neue hinzählen zu können; man muss sie alle weggenommen haben, ehe man sie wieder hinzählen kann, so dass die Gleichung hervorgeht: $10 - 10 + 10 = 10$. Diese 10 Gulden bleiben darum 10 Gulden, auch wenn sie zweimal gezählt werden, weil man sie vorerst der Reihe nach wegnehmen muss, ehe man sie wieder aufs Neue zählen kann. Das Unterhaltende dieses Scherzes besteht darin, dass die Unaufmerksamen verwirrt werden; sie denken nur an das neue Zählen, an das Hinzusetzen, nicht aber an die vorausgehende und stillschweigend vorausgesetzte Wegnahme dessen, was aufs Neue gezählt wird. Das Axiom ist also in Wahrheit $a - a + a \infty a$. Wenn man

dasselbe (die 10 Gulden) nur *einmal* hat, so kann man sie unmöglich zum zweitenmal haben (zählen), ohne dass man sie (wenigstens stillschweigend) das erstemal wieder weggenommen hat. — Das Axiom $a - a + a \infty a$ ist aber von ganz unverkennbarem mathematischen Character, nur ist das Zeichen (∞) statt des Zeichens ($=$) gesetzt. Und diess Axiom wird mit dem einen oder andern Zeichen schwerlich in irgend einer andern Wissenschaft, ausser in der Mathematik, eine Anwendung haben.

Das *erste* Postulat: dass mehrere Objecte zusammen genommen ein neues Object bilden, ist von sehr zweifelhafter Allgemeinheit. Es gilt wohl von mathematischen Grössen, dass sie addirt eine neue Grösse geben, z. B. $5 + 7 = 12$, es kann aber nicht von solchen Begriffen gelten, die möglicherweise gar nicht mit andern zusammengesetzt werden können. Wenn es z. B. Wissenschaften giebt, die das Individuelle, Innerliche, wesentlich Geistige untersuchen, dann wird man nicht ohne Beweis annehmen können, dass auch für sie das Axiom gültig sei: $a + b \infty c$. — So ist denn der beabsichtigte allgemeine Calcul doch nur der besondere mathematische Calcul, denn bloss andere Zeichen, z. B. ∞ , von denen gar nicht gesagt wird, welche wirklichen, bestimmten Operationen sie darstellen sollen, können in der Sache nichts ändern. — Ganz dasselbe gilt auch von dem zweiten Postulate.

Von gleicher Art sind die Lehrsätze. Der erste Lehrsatz: Objecte, die mit einem dritten dieselben sind, sind auch unter sich selbst dieselben, ist nichts weiter, als der mathematische Lehrsatz: Grössen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich selbst gleich. Der mathematische Ausdruck *gleich* ist sogar bezeichnender, als der allgemeine Ausdruck: *dieselben Objecte*. Denn als *gleich* werden nicht bloss identische, sondern auch unterscheidbare Grössen genommen, Grössen, in denen verschiedene Operationen enthalten sind, und die doch für einander gesetzt werden können. Würde der Begriff der

Gleichheit in den Begriff der *Identität* und *Congruenz* zusammengezogen, so würde keine Erkenntniss, keine Einsicht in die Ableitbarkeit einer Operation aus einer andern gewonnen werden. So gilt z. B. die Gleichung $5 + 7 = 12$, so sind zwei Grössen gleich, in denen verschiedene Operationen enthalten sind; ebenso ist $2^4 = 16$, $x^m = y$ u. s. w.; so kann ein Viereck der Grösse nach einem Dreiecke gleich sein u. s. w.

Die Proben dieses allgemeinen Calculs sind als misslungen zu betrachten, weil sie, statt allgemein zu sein, nur particular mathematisch sind, und nicht einmal die Reinheit und Folgerichtigkeit der Mathematik bewahren.

Dasselbe wird von den Zusätzen gesagt werden müssen. Sie haben zwar logische Haltung, aber nicht die Reinheit und Consequenz der logischen Gesetze. Sie wollen nicht bloss allgemein sein, wie es die logischen Sätze sind, sie wollen auch in dieser Allgemeinheit zugleich partikular, bestimmt und inhaltsvoll sein, was unmöglich ist. So ist z. B. die Definition: dass a , b , ab , bcd u. s. w. schlechthin Ausdrücke seien, gerade durch ihr Streben nach Bestimmtheit unbestimmt. Denn welche Operation soll z. B. unter ab , oder unter bcd gedacht werden? In der Mathematik wird durch diese Zeichen die *Multiplication* dargestellt; aber hier ist nicht erklärt, was darunter verstanden werden soll.

Das Postulat, dass es erlaubt sei, ein Zeichen mit einem andern oder mit mehreren Zeichen gleichbedeutend zu nehmen, ist wieder unbestimmt, weil nicht erklärt ist, durch welche Operationen diese mehreren Zeichen verbunden seien. Wollte man auch geneigt sein, etwas ohne Beweis anzunehmen, so muss doch wenigstens erklärt werden, was man sich unter dem Angenommenen zu denken habe. *Leibniz* erläutert es durch den Satz: a ist bc , der Mensch ist ein vernünftiges Thier. Durch welche Operation sind aber diese beiden Begriffe verbunden? Man kann an die Beziehung von Subject und Prädikat denken. Aber ist denn diese Beziehung wahrhaft allgemein? In der

Mathematik wird sie nicht gebraucht. Alle mathematischen Operationen werden nicht durch die unbestimmte Copula *sein*, sondern durch die bestimmte Copula *gleich-sein* verbunden. Der Begriff der Gleichheit hebt die Beziehung von Subject und Prädicat auf. Z. B. $12 = 10 + 2$. Hier ist weder 12 Subject, noch $10 + 2$ Prädicat, noch auch umgekehrt; beide sind Grössen schlechthin, und haben wohl die Beziehung der Gleichheit, nicht aber die Beziehung von Subject und Prädicat zu einander.

Das zweite Princip, dass die Verwechslung der Buchstaben in demselben Ausdrücke nichts ändere, dass *ab* dasselbe sei, was *ba*, animal rationale und rationale animal, gilt zwar in diesem und in ähnlichen Beispielen, und auch da nicht ohne grammatische Einschränkungen, es gilt ferner in der mathematischen Addition und Multiplication, aber keineswegs in der Subtraction, Division, Potenzirung u. s. w. Denn $a - b$ ist nicht so viel als $b - a$; $\frac{a}{b}$ ist nicht $\frac{b}{a}$, a^b ist nicht b^a u. s. w. Dieses Princip ist also nicht einmal allgemeines Princip eines besondern Calculs, geschweige denn allgemeines Princip des allgemeinen Calculs.

Das dritte Princip: dass die Wiederholung desselben Zeichens in einem Ausdrücke unnütz sei, wie: aa ist b; der Mensch Mensch ist Thier — gilt wohl als grammatische Regel der Sprache, aber es ist zweifelhaft, ob selbst die Logik diess Princip gelten lasse, da sie sich doch unter der Wiederholung der Zeichen irgend eine bestimmte Operation denken muss. Da aber diese Operation selbst nicht erklärt ist, so bleibt Alles unbestimmt. In der Mathematik z. B. hat diese Operation: aa, als Multiplication, einen sehr bestimmten Sinn, und ist keineswegs unnütz. Also auch dieses Princip wird aus dem allgemeinen Calcul verbannt werden müssen.

Das vierte Princip, dass aus beliebig vielen Sätzen ein neuer Satz gebildet werden könne, durch Zusammenfassung aller

Subjecte in ein Subject und aller Prädicate in ein Prädicat, kündigt sich von selbst als unbestimmt an, da nicht gesagt ist, durch welche Operation die Subjecte und die Prädicate zusammengefasst werden sollen. Uebrigens tritt die Einschränkung ein, dass Widersprechendes nicht zusammengefasst werden soll. Was ist aber widersprechend, und durch welche Operationen wird erkannt, dass etwas widersprechend sei? Die Bemerkung, dass man durch die Verbindung von widersprechenden Begriffen gerade nichts Unwahres, aber doch auch nichts Möglichen finde (das Zirkel-Quadrat ist unwirklich wirklich — das Zirkel-Quadrat ist eine wirkliche Figur?), diese Bemerkung, wenn sie auch wahr wäre, würde doch die billige Forderung der Wissenschaft nicht aufheben können, dass nichts Illusorisches, sondern wirklich zum Ziele Führendes gelehrt werden solle.

Von solcher Beschaffenheit sind die Versuche von *Leibniz*, der mit allem Rechte unter die grossen Mathematiker und Philosophen aller Zeiten gezählt werden muss. Allerdings sind aber diese Versuche auf dem abstractesten und schwersten Gebiete des menschlichen Denkens angestellt worden. Ihr Schicksal mag nicht mit Unrecht als Vorbedeutung für alle fernerer Versuche dieser Art betrachtet werden.

Gleichwohl hat *Leibniz* das Wesen des allgemeinen Calculs im Ganzen richtig gefasst. Er hat erkannt, dass die Zeichen der Objecte willkürlich seien, dass Alles, was durch eine Verbindung gewisser Zeichen ausgedrückt wird, durch *dieselbe* Verbindung anderer Zeichen ausgedrückt werden könne, dass die Zeichen durch Kürze und Einfachheit die Wesenheit der Objecte und ihrer Operationen darstellen, und Alles andeuten sollen, was in ihnen enthalten, und was nicht in ihnen enthalten sei, was daher auch auf keine Weise aus ihnen gefunden werden könne. Folge davon ist, dass diese Zeichen die Probe der Wahrheit in sich selber haben, und nicht in einer neben ihnen fortlaufenden, beständigen Wiederholung des Denkens, das oft

unbewusst ganz anders wiederholt wird, als es ursprünglich ausgeführt worden war, beaufsichtigt zu werden brauchen. Weiss man einmal bestimmt, was in einer Operation gedacht wird, (und diess ist die unumgänglich nothwendige Vorbedingung einer Zeichensprache), so kann man das Gedachte wieder nachdenken, und in denselben Zeichen prüfen; es ist nicht möglich, dass dabei ein nothwendiges Moment des Denkens übersehen werde, denn die Zeichen stellen ja alle diese Momente dar, und machen die allerstrengste Probe möglich und leicht. *Leibniz* hat ganz bestimmt erkannt, dass die Bezeichnung der Operationen das Wesentlichste sei. Gerade die Operationen sollen durch die Zeichen bemerklich gemacht werden, dass man an das Denken selbst denke, dass man nicht im Denken über das Denken selbst gedankenlos bleibe. Aus diesem Grunde werden ja die bestimmten Operationen des Denkens mit eigenen Zeichen bezeichnet und herausgestellt.

Leibniz giebt endlich in Fragment XV. eine Uebersicht dieser neuen Wissenschaft durch die Zeichen. Das Ganze ist reiner Entwurf. Seine Worte sind: „Zuerst die Einleitung. Dann ist aus einander zu setzen, auf welche Art ich auf eine so wunderbare Kunst gekommen bin. Auch ist Einiges über den gegenwärtigen Zustand der Wissenschaften hinzuzusetzen. — Damit der Unterschied meiner Principien von den Cartesianischen ganz deutlich hervortrete, werde ich die Einwürfe der Gelehrten gegen die Cartesianischen Principien und die Antworten von *Cartesius* geben. Ich werde meine Erläuterungen hinzufügen, und dasjenige ergänzen, was jene Gelehrten umsonst von *Cartesius* erwartet haben. Ich werde auch eine Analyse der allergewöhnlichsten Urtheile geben, der Principien, nach welchen die Menschen denken, ehe sie Wissenschaft kennen lernen. Diese Principien sind nicht zu verachten, und dialectisch durchzuführen. Es würde sich freilich nicht der Mühe lohnen, Beweise für sie aufzusuchen, wenn es nicht auf etwas Anderes ankäme, als schon Bekanntes nur aufs Neue hervorzusuchen und aus-

zuführen. Es kommt aber auf mehr an: denn in der Analyse der Wahrheit, in der Berichtigung und Erkenntniss der Art und Weise, wie wir denken, liegt das ganze Geheimniss der Erfindungskunst. Es ist nützlich und nothwendig, dass wir bis zu diesem letzten Grunde zurückgehen. — Dann folgen die Elemente der ewigen Wahrheit selbst, es wird gezeigt, wie man in allen Wissenschaften ganz strenge Beweise geben könne, Beweise, die nicht bloss den mathematischen Beweisen gleich kommen, sondern sie sogar übertreffen, weil in der Mathematik Vieles vorausgesetzt wird, was hier bewiesen werden kann. So wird dieser neue und wunderbare Calcul eingeführt, der in allem unseren Denken, in allen Wissenschaften gleichmässig gilt, und der nicht weniger Sicherheit gewährt, als die Arithmetik oder die Algebra. Wird dieser Calcul angewendet, so wird man alle Streitigkeiten beenden können, so weit sie aus den gegebenen Thatsachen beendigt werden können; man wird nur zu rechnen brauchen. Jeder Irrthum wird nur ein Rechnungsfehler sein, und auch der Unwissende oder Böswillige wird genöthigt werden können, der Wahrheit die Ehre zu geben.“

Mit solchen frohen Hoffnungen und Erwartungen ist diese Wissenschaft begonnen worden. Und was war ihr Erfolg? — Nicht eine einzige der vielen Wahrheiten, die seit dieser Zeit entdeckt und bewiesen worden sind, ist durch diese allgemeine Zeichensprache entdeckt oder bewiesen worden. Alle sind ohne sie entdeckt und bewiesen worden. Man wird sich darüber keine Täuschung machen können. Diese allgemeine Zeichen- und Gedanken-Sprache wird niemals irgend einer menschlichen Anstrengung gelingen, und alle Hoffnungen und Erwartungen, die man sich davon gemacht hat, werden immer eitel und unbegründet bleiben müssen. *Das Allgemeine wird immer die gewöhnliche Sprache bleiben, und diese kann solchen Forderungen nicht genügen.* Und nicht die Sprache ist mangelhaft, sondern die Forderungen sind übertrieben.

Die angestrebte allgemeine Zeichensprache würde nur dann

möglich sein, wenn alle Wissenschaften *eine einzige Wissenschaft* wären, wenn sie alle nach einem und demselben Axiome erkannt und bewiesen werden könnten. Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder sind alle Wissenschaften nur eine einzige und identische Wissenschaft, was die Meisten behauptet haben und behaupten, dann wird eine allgemeine Zeichensprache überhaupt möglich sein; oder aber, alle Wissenschaften sind nicht eine einzige identische Wissenschaft, sondern sie sind *wesentlich verschiedene* Wissenschaften, und dann wird es unmöglich sein, eine einzige Zeichensprache zu bilden, es wird so viele besondere Zeichensprachen geben müssen, als es besondere, wesentlich verschiedene, Wissenschaften geben wird. Diese Frage muss zuerst entschieden werden, ehe dem Gedanken an eine Zeichensprache auch nur die geringste Folge gegeben werden kann.

Wäre die Behauptung der neuern Philosophie richtig, dass alle Wissenschaften substantiell identisch, nicht bloss durch einen und denselben erkennenden Geist harmonisch verbunden seien, so wäre es allerdings nicht Unvernunft, eine allgemeine Zeichensprache bilden zu wollen. Diesem muss aber widersprochen werden; es muss ohne alle Zweideutigkeit behauptet werden, dass es mehrere wesentlich verschiedene Grundwissenschaften gebe, in denen die bestimmten Gesetze, nach welchen die bestimmten Begriffe verbunden werden, wesentlich verschieden und unterscheidbar seien. Für jede dieser Grundwissenschaften wird es eine eigene Zeichensprache geben müssen. Und obgleich es mehrere wesentlich verschiedene Grundwissenschaften geben kann, so werden sie doch in *Harmonie* mit einander sein müssen, weil sie von einem und demselben Geiste erkannt und begriffen werden.

Unter wesentlich verschiedenen Wissenschaften werden aber Wissenschaften verstanden, in denen die bestimmte Verbindung der Begriffe, also das bestimmte Denken, auf wesentlich verschiedene Art vollzogen wird. Das allgemeine Denken

wird dasselbe sein, aber das bestimmte Denken wird in verschiedenen Grundwissenschaften verschieden bestimmt sein müssen. Und diess wird nicht von der Einheit oder Verschiedenheit des erkennenden Geistes, sondern von der Eigenthümlichkeit des zu erkennenden Gegenstandes abhängig sein. Es werden daher die zu erkennenden Gegenstände wesentlich verschieden sein; und die Welt wird nicht eine einzige, arme und identische Substanz zur Grundlage haben, sondern einen Ursprung ansprechen müssen, der Mehreres und Verschiedenes in Einheit und Harmonie vereinigen kann.

Von der Mathematik behaupten wir, dass sie eine solche Grund-Wissenschaft sei; und alle physikalischen Wissenschaften, die sich auf das Denken der Mathematik gründen, müssen auch ihre Zeichensprache annehmen, wie sie dieselbe auch wirklich angenommen haben; aber alle Wissenschaften, die nichts Mathematisches enthalten, werden eben so wenig die Zeichensprache als das Denken von der Mathematik entlehnen können, und alle Versuche sind als gescheitert anzusehen, die in einer neuen Philosophie mit den Zeichen der Mathematik in einem wesentlich andern Gebiete der Wissenschaft angestellt worden sind.

Das bestimmte Denken der Mathematik besteht in ihren Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division u. s. w., und Alles, was durch diese bestimmten Operationen verbunden wird, ist Gegenstand der Mathematik, und kann keiner andern Wissenschaft angehören; was aber nicht durch diese Operationen verbunden und erkannt wird, kann niemals Gegenstand der Mathematik sein, also auch nicht ihre Zeichensprache annehmen und brauchen, weil diese Zeichensprache nur auf die bestimmten mathematischen Operationen berechnet ist.

So sind z. B. die Thatsachen der naturhistorischen Wissenschaften, die sich mit Gegenständen beschäftigen, die ein Werden und Vergehen, ein Wachsen und Abnehmen und überhaupt eine *eigene Zeit* in sich haben, ganz andere als die Gegenstände der Mathematik, die bloss räumlichen Grössen, die

Inponderabilien, die nicht wachsen, sondern bleiben, was sie sind, heute und alle Zeit, und weder Geburt noch Tod kennen. Werden die Thatsachen der Imponderabilien durch die Mathematik erkannt, so können die Thatsachen der organischen Natur nicht durch Mathematik verstanden werden. Die Addition von Grössen wird nicht das in ihnen Enthaltene sein, sie werden eine andere Grundlage ihres Seins und Erkenntwerdens haben. Werden alle Wissenschaften zusammengenommen, die in dieses Reich der organischen Natur gehören, so wird ihnen eine sie alle erklärende analytische Wissenschaft vorausgehen müssen, ähnlich wie die Mathematik allen physikalischen Wissenschaften vorausgeht und als ihre innerliche und erklärende Wissenschaft erkannt wird. Und jene Grund-Wissenschaft wird auch wie die Mathematik ihre Zeichensprache haben, wenn sie erst ihre eigenen bestimmten Operationen kennen gelernt hat. Natürlich müssen aber die bestimmten Operationen zuerst bekannt und erkannt sein; es wäre Thorheit, etwas Unerkanntes und Unbestimmtes mit einem bestimmten Zeichen bezeichnen zu wollen. Weiss man auch bis jetzt noch nicht, was das in ihnen zu Erkennende sei, welche bestimmte Art der Erkenntniss es sei, in der die Begriffe in ihnen verbunden und gedacht werden, so weisen doch die Naturwissenschaften in ihren Fortschritten auf eine solche wesentliche Grundwissenschaft zu deutlich hin, als dass sie länger verkannt werden könnte. Eben so werden die Thatsachen der Welt des Geistes, das Reich der Willens und der Freiheit und Sittlichkeit auf eine andere Art erkannt werden, als die Thatsachen der Mathematik und der Naturphilosophie; die bestimmten Begriffe werden in ihr anders verbunden werden müssen, als in diesen Wissenschaften, sollte man auch noch nicht gefunden haben, durch welches bestimmte Denken das Denken über geistige Gegenstände ausgezeichnet werde. So viel ist bekannt, dass es ein anderes bestimmtes Denken sei, als eine mathematische oder naturphilosophische Operation; der Grund des Willens wird nicht durch Addition zu erklären sein. So werden auch die geistigen

Wissenschaften, wie die physikalischen und naturphilosophischen Wissenschaften eine ihnen vorausgehende analytische Grundwissenschaft haben, und diese wird auch ihre eigenthümliche Zeichensprache haben müssen. Es wäre doch merkwürdig, wenn man niemals dahin gelangen könnte, bestimmt zu erkennen, auf welche Art und Weise die sittlichen Gegenstände gedacht und verbunden werden. Wird es gelingen, die eigenthümliche Art und Weise der Erkenntniss geistiger Dinge festzustellen, so wird man sie auch durch Zeichen bezeichnen, und man wird mit diesen Zeichen rechnen können, wie mit den Zeichen der Mathematik.

Wie dem aber auch sein möge, so viel ist jedenfalls gewiss, dass, wenn es eine einzige identische Wissenschaft giebt, auch eine einzige allgemeine Zeichensprache, und wenn es mehrere verschiedene Grundwissenschaften giebt, auch mehrere verschiedene Zeichensprachen geben müsse; Zeichensprache wird also überhaupt möglich und nothwendig sein. Die nächste Aufgabe wird daher sein, dass die Gesetze ihrer Bildung und ihres Gebrauchs untersucht und aufgefunden werden.

Siebente Untersuchung.

Fortsetzung der vorhergehenden Untersuchung.

Das gänzliche Misslingen einer allgemeinen, für alle Wissenschaften gültigen, Zeichensprache wird immer der vorzüglichste und stärkste Einwand gegen sie selbst sein. Allein hier sind drei mögliche Fälle zu unterscheiden. Erste Möglichkeit: Es ist in allen Wissenschaften keine näher bestimmte Verbindung der Begriffe, in allen gilt nur die schlechthin allgemeine Verbindung, dass die Begriffe überhaupt nur übereinstimmen und zusammengehören, wie z. B. die Wissenschaft der Logik ist. Dann wird allerdings keine Zeichensprache nothwendig sein, denn diese schlechthin allgemeine Verbindung der Begriffe wird durch die Copula einer jeden Sprache hinlänglich gut ausgedrückt und bezeichnet. Diese erste Möglichkeit wird aber durch die Mathematik gestürzt, denn diese hat es wirklich zu einer näher bestimmten Verbindung der Begriffe, zu den Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication u. s. w. gebracht. Es ist also nicht richtig, dass in *allen* Wissenschaften keine näher bestimmte Verbindung der Begriffe sei; die Mathematik widerlegt diess durch ihre Operationen.

Zweite Möglichkeit: Alle Wissenschaften bringen es zu näher bestimmten Verbindungen der Begriffe, und alle Wis-

senschaften bilden nur eine einzige und identische Wissenschaft. Es muss daher eine Zeichensprache, aber nur eine einzige, allgemein gültige, Zeichensprache eingeführt werden. — Etwas wird in dieser Voraussetzung falsch sein müssen, da eine allgemein gültige Zeichensprache unmöglich ist. Was wird aber diess Falsche sein? Etwa, dass es die Wissenschaften zu näher bestimmten Verbindungen der Begriffe gebracht haben? Keineswegs, denn diess ist gerade das Wahre und Vollkommene der Mathematik, so wie jeder andern Wissenschaft. Also wird das Andere falsch sein müssen, dass alle Wissenschaften eine einzige und identische Wissenschaft bilden. Dieser Satz wird aufgegeben werden müssen. Auch zeigt die Mathematik, dass sie anderer Natur sei, als die andern Wissenschaften, denn das Mathematische ist nicht dasjenige, was in andern Wissenschaften das zu Erkennende ist. In andern Wissenschaften sollen vielmehr die Wahrheiten durch andere Operationen, als durch Addition und Subtraction u. s. w. gefunden werden.

Es bleibt daher nur die dritte Möglichkeit übrig, dass zwar alle Wissenschaften eine näher bestimmte Verbindung der Begriffe, eine eigenthümliche Operation haben, dass sie aber nicht eine einzige identische Wissenschaft, sondern mehrere bestimmte Grundwissenschaften der menschlichen Erkenntniss bilden. Es werden daher so viele verschiedene Zeichensprachen eingeführt werden müssen, als es verschiedene Grundwissenschaften geben wird. — Da es nun einmal eine unbestreitbare Thatsache ist, dass die Mathematik eine bestimmte Zeichensprache habe, und dass sie dieser Zeichensprache allein ihre grossen und sichern Fortschritte verdanke, so werden die übrigen Grundwissenschaften an Bestimmtheit nicht *unter* der Mathematik zurückbleiben können und dürfen.

Es können aber dennoch Einwendungen gegen die Feststellung bestimmter Zeichensprachen gemacht werden. Sie sind ja auch wirklich gegen die mathematische Zeichensprache ge-

macht worden. Sie werden sich erklären und berichtigen lassen. — Wenn etwa gesagt wird, dass Alles, was durch die Zeichen gefunden werde, auch durch die ältesten Zeichen, nämlich durch die Worte der Sprache, gefunden werden könne, und dass es der Zeichensprache nicht zum Ruhme gereiche, dass sie nur dasjenige leiste, was auch schon die Worte der Sprache leisten, so wird diesen Behauptungen auf's Bestimmteste widersprochen werden müssen.

So ist z. B. gegen die analytische Zeichensprache eingewendet worden, dass sie nichts Neues gebe ³⁾. „Wird z. B. gefragt, was das für eine Zahl sei, die zu 3 addirt dasselbe gebe, als sie mit 3 multiplicirt gebe, so wird der Analytiker sagen, dass das Gesuchte gleich x sei, und dass die Gleichung statt finde: $3 + x = 3x$, woraus $x = 3:2$ folge. Diess sei die gesuchte Zahl. Allein ist das nicht dasselbe, als wenn wir sagten: drei zugleich mit dem Gesuchten ist gleich dem dreifachen Gesuchten, und zwei Gesuchte sind gleich drei, also ein Gesuchtes gleich drei Halben? Ist daraus nicht deutlich, dass jene gerühmte Symbolik nicht durch die Symbole, sondern allein durch den Schluss aus der Voraussetzung auf die Folge ihre Gültigkeit habe, was sicherer und deutlicher durch die Worte als durch die Zeichen geschehen kann? Einige sagen freilich, dass es doch einigen Nutzen habe wegen der Kürze der Symbole. Dagegen ist zu bemerken, dass es viel schwerer sei, den Nerv der Beweise zu fassen, wenn sie in Symbolen, als wenn sie in der Sprache geführt werden. Und obwohl die Schrift der Symbole kürzer als die Schrift der ausführlichen Rede ist, so *ist doch das Denken nicht kürzer*; auch sind die Beweise nicht deutlicher, weil die Symbole von Vielen nicht verstanden werden, und auch wechseln, von Diesen so, von Andern anders genommen

³⁾ Hobbes, *Examinatio et Emendatio Mathematicae*.

werden. Es ist keine Erleichterung des Denkens, denn die Symbole müssen eben so wie die Worte selbst im Geiste durchgegangen und wiederholt werden.“ —

Diess die Einwendungen, welche trotz alles Scharfsinns die Schwäche ihrer Gründe nicht verbergen können. — Schon das Beispiel ist unglücklich gewählt, und begünstigt das Missverständniss, dass mehr die Objecte, als die Operationen mit eigenen Zeichen bezeichnet werden sollen. Dann ist das Beispiel höchst einfach, und kann allerdings aus dem Gedächtnisse gelöst werden. Wer hat diess jemals bezweifelt, dass es bei einem solchen Beispiele gelingen könne? Was beweist diess aber für die zusammengesetzten und schwierigen Probleme, selbst nur für die algebraischen Gleichungen höherer Ordnung, für transcendente Functionen oder Differenzial-Operationen? Wer auch nur im Geringsten weiss, was hier allgemeine Zeichen leisten, der weiss auch, dass sie durch nichts anders ersetzt werden können, und dass selbst der erhabenste und grösste Geist, wenn er der Zeichen entbehren müsste, durch die Last der Worte und durch die Fülle der Operationen, die er immer in allen ihren Beziehungen neben den Worten gegenwärtig erhalten müsste, gehindert und gelähmt würde, während die algebraischen Zeichen diese Gedanken und Operationen in allen ihren gegenseitigen möglichen Beziehungen und Verbindungen schon durch sich selbst vergegenwärtigen, ohne dass ausser und neben ihnen etwas Anders gedacht und gemerkt werden müsste. Nehmen wir z. B. die höchst einfache Formel $\int_b^a \sqrt{r^2 + x^2} dx$, so könnte sie schon nicht mehr in Worten allein gegeben werden, ohne dass alle Uebersicht verloren ginge. Man kann einwenden, dass man zu einer solchen Formel durch blossе Worte nicht gelange. Allerdings, aber eben weil sie keine Zeichen anwenden, gelangen sie nicht zu dem, wozu die Wissenschaft gelangen soll.

Wollte man den Ausdruck $\int_b^a \sqrt{r^2 + x^2} dx$ in den Worten der Sprache und der Definitionen geben, so würde er auf's Kürzeste gegeben folgender sein: „Es soll das Product des Differenzials der veränderlichen Grösse x und der zweiten Wurzel aus der Summe $(r^2 + x^2)$, welche entsteht, wenn zur zweiten Potenz einer constanten Grösse die zweite Potenz der veränderlichen Grösse addirt wird, zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ integrirt werden.“ Welche Sprache ist hier kürzer und bezeichnender? Die hörbare Wortsprache oder die sichtbare Zeichensprache? Sprache ist Sprache; es ist für den Gedanken dasselbe, ob er sich der Hilfsmittel der hörbaren Laute oder der sichtbaren Zeichen bedient; er wählt dasjenige, was volle und ganze Uebersicht giebt, und auf's Leichteste und Sicherste zum Ziele führt. —

Der fernere Einwand, dass die Beweise in der Zeichensprache nicht durch die Zeichen, sondern durch das Denken Gültigkeit erlangen, ist an sich vollkommen begründet. Es hat auch noch Niemand geglaubt, dass man durch die Zeichen allein, wie durch eine Art von Magic die Wahrheit finden könne ohne alle Gedanken. Alle Wahrheit wird nur durch das Denken erkannt, und die Frage ist nur, ob die Hilfsmittel von der Art sind, dass sie den Gedanken unterstützen können oder nicht. Die algebraischen Zeichen unterstützen den Gedanken wirklich, weil sie die ausgeführten oder auszuführenden Operationen anzeigen, und unwidersprechlich andeuten, wie diese Operationen ferner ausgeführt werden können. Was die übrigen Einwendungen betrifft, dass theilweise nicht bloss die Symbole, sondern auch die Worte und Begriffe selbst im Geiste durchgegangen und wiederholt werden müssen, dass die Symbole wechseln, und von den Einen so, von den Andern anders genommen werden, dass die Symbole Vielen unverständlich seien, und dass es daher viel schwerer falle, den Nerv der symbolisch geführten Beweise zu verstehen, als den Nerv der

Beweise in der Muttersprache — so können sie sämmtlich auf's Leichteste aufgelöst und widerlegt werden.

Allerdings müssen nicht bloss die Symbole, sondern auch die durch sie repräsentirten Begriffe im Geiste durchgegangen, erwogen und verstanden werden. Aber diess geschieht da, wo es noch leicht ist, in den einfachen Operationen. Dort werden die Symbole aufgestellt und erklärt, es wird gezeigt, wie sie in allen Verbindungen gebraucht werden müssen, damit sie Wahrheit geben können. Kommen sie dann später in solchen zusammengesetzten und schwierigen Verbindungen vor, so stösst man auf schon bekannte Operationen, die man jetzt nicht wieder auf's Neue zu definiren und festzustellen hat, und die sogleich die Auflösung der Probleme, in so weit sie möglich ist, anzeigen und vorbereiten. Ja sind einmal in einer Wissenschaft alle ihre Operationen aufgestellt und erklärt, so wird man auch in den schwierigsten Problemen dieser Wissenschaft nur auf Bekanntes stossen können. Diess ist gerade der Hauptvorthail in der Feststellung der Symbole, dass sie nicht aus der Luft gegriffen, sondern für vorher bestimmte und erkannte Operationen eingeführt sind. Die Operationen werden durch die Symbole einzeln hervorgehoben, damit man nicht mitten in einer Aufgabe auf etwas stosse, an das man früher gar nicht gedacht hatte, und so neben Bekanntem und Erkanntem auch Unbekanntes und Ungeahntes antreffe und in Verlegenheiten gerathe, denen man vielleicht durch einen Sprung im Urtheile oder durch gänzliche Vernachlässigung entgehen, und dadurch zwar den Schein von Wissenschaft, aber keineswegs die Wissenschaft selbst retten könnte. Worte sind keine Hilfsmittel gegen solche ungeahnte Schwierigkeiten, *weil die Worte Alles umfassen müssen, was in ihren Begriffen, wenn auch noch so spät, erkannt wird*; aber die Symbole, die einzeln festgestellt sind, und nichts Unerkanntes enthalten, verrathen sogleich, ob jenes Ungeahnte nur in Verbindungen schon bekannter und erklärter Operationen bestehe, oder aber ob es

wirklich etwas Neues sei, was dann auch auf der Stelle als Neues hervorgehoben, erklärt und in eigenen Symbolen festgestellt werden kann. Diess ist das Wohlthätigste einer festen, sichern, durch Symbole unterstützten Wissenschaft, dass sogleich Alles elementarisirt, und das Bekannte als Bekanntes, das Neue und Unbekannte als Neues und Unbekanntes wahrgenommen werden kann, während alle Wissenschaften, die keine Symbole haben, Bekanntes und Unbekanntes, Gedachtes und Ungedachtes, Uebereinstimmendes und Widersprechendes in bunter Verwirrung neben einander bestehen lassen müssen, und nur durch die grösste Anstrengung des Denkens das Eine von dem Andern zu unterscheiden im Stande sind. Auch die tüchtigsten Gedanken, wenn sie ohne Unterstützung bleiben, werden nicht eine lange Reihe der verschiedenartigsten Begriffe und Worte hindurch ausdauern können, sie werden hie und da Bekanntes und Unbekanntes, Gedachtes und Ungedachtes zusammenfassen, sowie auch die schärfsten Augen Vieles in den Himmelsräumen nicht sehen und nicht unterscheiden, was selbst schwächere Augen durch ein Fernrohr und seine Tragkraft unterstützt aufs Leichteste sehen und unterscheiden können.

Was ferner den Einwurf anbelangt, dass die Symbole wechseln, und von dem Einen so, von dem Andern anders genommen werden, so wird diess nur am Anfange der Zeichensprache möglich sein können, so lange sich noch keine allgemeine Uebereinstimmung gebildet hat. Dieser Zustand ist vorübergehend, es wird sich um so früher eine allgemeine Uebereinstimmung bilden müssen, je thätiger die hervorragenden Geister aller Völker an der Feststellung dieser von jeder einzelnen Volkssprache unabhängigen Hilfsmittel des Gedankens arbeiten werden. Diess ist auch frühzeitig bei der mathematischen Zeichensprache der Fall gewesen, und es ist nicht mehr erlaubt, ja es kann gar nicht vorkommen, dass der Eine die Symbole des Andern in einem ganz andern Sinne nehme, als sie dieser genommen hat. Jeder Einzelne wird sich genöthigt fühlen, mit den

Andern übereinzustimmen, er wird also die Symbole brauchen und verstehen, wie sie von Allen gebraucht und verstanden werden.

Es werden daher auch Alle den Nerv der symbolisch geführten Beweise verstehen, und die ihn nicht verstehen, werden Diejenigen sein, die ausserhalb der Wissenschaft stehen. Sie sind allerdings nicht Wenige. Aber gerade so Viele, als die Wissenschaft verstehen, werden auch die Symbole verstehen, und diess ist gerade hinreichend. Die symbolisch geführten Beweise würden freilich auch in der Muttersprache verstanden werden können, wenn sie in der Muttersprache geführt werden könnten. Aber diess ist nicht selten unmöglich. Die gefundenen Resultate können wohl in der Muttersprache gegeben und vulgarisirt werden, wenn sie einmal durch Symbole gefunden sind, aber gewöhnlich bleibt auch da nur die Schale, und das Wesentliche, die Einsicht in den Beweis, geht verloren. Ein Beweis kann nur von Demjenigen ganz gefasst werden, der ihn ganz zu führen und in allen seinen Theilen und Elementen zu verstehen im Stande ist.

Die Bildung und der Gebrauch der Zeichen ist ein schwerer Theil jeder Wissenschaft, und wird keineswegs am Anfange eintreten können, sondern erst, wenn eine gewisse Stufe des Fortschrittes erreicht worden ist. Erst dann, wenn bestimmte, durchgreifende Operationen erkannt und gebildet sind, stellt sich die Nothwendigkeit der Zeichen heraus. Erst muss man bestimmen können, auf welche eigenthümliche Art die Gegenstände einer Wissenschaft verbunden, getrennt und erkannt werden, erst müssen bestimmte Operationen erkannt sein, ehe bestimmte Zeichen für sie eingeführt werden. Das Wenigste, was eine Wissenschaft erreicht haben muss, ehe sie zur Bildung ihrer Zeichen übergehen kann, ist, dass sie erklären könne, nach welchen Gesetzen in ihr gedacht werde, und was das in ihren Gebieten wahrhaft zu Erkennende sei.

In jeder Zeichensprache sind drei wesentliche Punkte zu unterscheiden. Zuerst müssen die Gegenstände einer Wissen-

schaft, z. B. die Grössen der Mathematik, nicht mit Worten, sondern mit blossen Buchstaben bezeichnet werden, weil die Buchstaben einfacher sind, als die ganzen Worte. Die Buchstaben sind uns schon bekannt, und brauchen nicht erst aufs Neue gelernt zu werden. Sie sind auch von solcher symbolischer Allgemeinheit, dass sie nicht bloss die Gegenstände einer einzigen Wissenschaft, z. B. die Grössen der Mathematik, sondern die Gegenstände aller Wissenschaften bezeichnen, daher sie auch das wahrhaft Allgemeine, allen Wissenschaften Gemeinschaftliche, werden können. Es wird auch hier, wie in der Sprache, der Weg der Natur betreten, die Gegenstände, die Begriffe werden gleichgültig bezeichnet, aber die *Verbindungen* der Begriffe, die Operationen werden wesentlich bezeichnet, weil sie allein das wahrhaft zu Erkennende sind.

Das zweite Moment jeder Zeichensprache besteht darin, dass die besonderen Operationen, die bestimmten Gesetze, nach welchen gedacht und erkannt wird, mit eigenen, ein für allemal gewählten und immer gültigen Zeichen bezeichnet werden, in der Art, dass keine Operation, die in einem endlichen Ausdrucke auf eine andere Operation gebracht werden kann, als neue Operation ausgeschieden und bezeichnet werde, dass aber hingegen jede Operation, die als wahrhaft neu erkannt wird, nicht durch Zusammenhäufung von Zeichen anderer Operationen, sondern durch ein eigenthümliches neues Zeichen bezeichnet werde. Diese wichtigeren, und im strengeren Sinne allein wichtigen Operations-Symbole, sind in der Mathematik durch die Zeichen der Addition, der Subtraction, der Multiplication u. s. w. mit Meisterschaft herausgestellt, und hinlänglich gut gebildet; sind aber in andern Wissenschaften so unbekannt, dass in ihnen wahrscheinlich noch gar nicht an solche bestimmte Operationen und Zeichen gedacht worden ist.

Das dritte Moment der Zeichensprache umfasst die bestimmten Zeichen der *ausgeführten* Operationen, im Gegensatze zu den Zeichen der vorausgehenden bloss angedeuteten und

noch auszuführenden analytischen Operationen. Hier ist wieder zu unterscheiden, dass man zuerst die ausgeführten Operationen einer Wissenschaft habe, und dass man sie dann mit eigenen Zeichen bezeichne. So werden in der Mathematik die ausgeführten mathematischen Operationen durch die *Zahlen* umfasst. Die Zahlen sind nicht Grössen, sondern bestimmte ausgeführte Operationen, und zwar Additionen. So ist z. B. in dem Ausdrucke: $100a$, a die Grösse und 100 das bestimmte Operationszeichen, dass a hundertmal addirt worden sei. — Die Zahlen müssen von *der* Beschaffenheit sein, dass sie nur nach einer einzigen Operation (nach der Addition) gebildet, und aufs Leichteste, eine aus der andern, abgeleitet werden können, und dass sie dennoch die Resultate aller übrigen analytischen Operationen enthalten. Diese Eigenschaft haben auch die Zahlen in ganz vorzüglichem Grade, sie sind nach der strengsten Systematik geordnet, und aufs Leichteste ableitbar. Die Zahlen umfassen vorwärts von der Einheit alle ganzen Zahlen, als Additionen der Einheit, und rückwärts in den Decimalbrüchen alle noch so kleinen Theile der Einheit bis ins Unendliche, ebenfalls in Additionen; sie umfassen alle Resultate, aus welchen Operationen sie auch hervorgehen mögen, entweder genau, wenn sie genau durch eine Einheit gegeben werden können, oder hinlänglich genau, zwischen beliebig bestimmten Grenzen. Die Resultate aller Operationen, der Multiplication, der Division, der Potenzirung, der Logarithmirung u. s. w. können in den durch die einzige Addition gebildeten Zahlen gegeben werden. Darum bilden auch die Zahlen das gemeinschaftliche Band aller analytischen Operationen, in ihrer Bestimmtheit ist das Ende und Ziel der Erkenntniss erreicht, jede Operation ist geschlossen, wenn ihre Resultate in die Zahlen eingereiht werden können. In den Zahlen ist fortan nichts Unbekanntes mehr, da sie durch die bekannte Operation der Addition von einander abgeleitet werden.

Darum ist es auch Aufgabe, dass die Zahlen durch ihre

Zeichen aufs Beste bezeichnet werden. Diess ist auch durch die *Ziffern* des Zehn-Ziffern-Systems aufs Vollkommenste gelungen. Wie viel ein gutes Ziffernsystem zum Wachstume einer Wissenschaft beitrage, ist leicht aus den unvollkommenen Ziffern-Systemen der Griechen und Römer einzusehen. Rechnungen, die jetzt selbst von den minder Geübten aufs Leichteste ausgeführt werden, waren den grössten Mathematikern des Alterthums, wie einem Archimedes, ganz unmöglich, da sie durch kein gutes und brauchbares Ziffer-System unterstützt wurden. Es würde ihnen z. B. unmöglich gewesen sein, logarithmische oder trigonometrische Tafeln bis auf sieben Decimalstellen genau zu berechnen. — An der rechten Bildung der Ziffernsysteme ist Alles gelegen, es gelten für sie ganz bestimmte Gesetze, die aber öfter ausgeübt, als erkannt werden. Die Aufstellung dieser Gesetze bildet den schönsten Theil der besondern arithmetischen Untersuchungen.

Hier werden andere Wissenschaften die grössten Schwierigkeiten finden, ein dem Zahlen- und Ziffern-Systeme analoges Zeichensystem für ihre vollendeten Erkenntnisse aufzustellen. Doch wird es auch nicht unmöglich sein. Die Zahlen sind die ausgeführten Operationen d. h. die Erkenntnisse in der Mathematik. Sowie ein Ausdruck auf eine bestimmte Zahl gebracht ist, ist er erkannt, und die Aufgabe ist vollendet. Also wird in andern Grundwissenschaften eine den Zahlen analoge systematische Ordnung der Erkenntnisse aufgestellt werden müssen, und jede Aufgabe wird gelöst sein, wenn sie in diese Summe der Erkenntnisse eintritt. Nur wird diese (apriorische) Summe der Erkenntnisse durch eine einzige Operation, wie in der Mathematik durch Addition, hergestellt werden müssen, doch so, dass sie dennoch alle Resultate der übrigen Operationen umfassen könne.

Nun dürfte es auch möglich sein, dem Ausspruche des Alterthums, dass die Zahlen den Dingen entsprechen, dass die Dinge Zahlen seien, einen bestimmten Sinn unterzulegen. Aller-

dings sind die Dinge auch die ausgeführten Operationen der Natur, und so wie sie sind, sind sie vollendet, und treten in den Kreis der erkennbaren Dinge ein. Sie sind also für das Wirken der Natur, was die Zahlen für das mathematische Denken sind, wenn man Grosses mit Kleinem vergleichen darf. Darin liegt eine Andeutung für die übrigen Vernunftwissenschaften, wie sie etwa ein dem Zahlensysteme entsprechendes Werk ausführen können. Es wird alle Resultate ihrer Erkenntniss geordnet und von einander ableitbar enthalten müssen, so dass das analytische Denken dieser Wissenschaften erfüllt sein wird, wenn es zu dieser Reihe der gedachten Dinge, und so an sein Ende gekommen ist.

Das erste und dritte Moment der Zeichensprache, die Bezeichnung der Grössen durch Buchstaben und die Bezeichnung der Zahlen durch Ziffern, ist ganz und gar bekannt, und keinerlei Schwierigkeiten unterworfen. Anders verhält es sich mit dem zweiten Momente der Bezeichnung der analytischen Operationen durch Symbole.

Diese Symbole sind, wie bekannt, folgende: $y = x$, worin das Zeichen ($=$) ausdrückt, dass die eine Grösse für die andere gesetzt werden kann. Die weiteren Zeichen sind: $y = x + a$;

$y = x - a$; $y = x \cdot a$ ($x \cdot a$; $x \times a$); $y = x : a$, $\left(\frac{x}{a}\right)$;

$y = x^m$; $y = \sqrt[m]{x}$. Das Zeichen ($+$) drückt die Addition, das Zeichen ($-$) die Subtraction, das Zeichen ($\cdot$) oder ($\times$) die Multiplication, das Zeichen ($:$) die Division, das Zeichen (x^m) die Erhebung zur m^{ten} Potenz, das Zeichen $\sqrt[m]{}$ die Ausziehung der m^{ten} Wurzel aus. Endlich gelten noch die Zeichen:

$y = \log_a x$, worin das abgekürzte Wort die Logarithmirung und a die Grundzahl des Logarithmensystems ausdrückt, so dass die Gleichung gelesen werden muss: wenn a zur Potenz y erhoben wird, so geht x hervor; oder: y ist diejenige Zahl

(der Logarithmus oder Exponent), zu welcher die Grundzahl a erhoben werden muss, damit x hervorgehe. Aehnliche Zeichen sind: $y = \sin. x$; $y = \cos. x$ u. s. w.; $x = \text{arc.} (\sin. = y)$; $x = \text{arc} (\cos = y)$ u. s. w. Dann giebt es noch die höheren Operations-Zeichen des Differenzirens und Integrirens, z. B.: $d y = d (f x)$; $\int dy = \int (f' x dx) = y + C$, wo C die constante Grösse bezeichnet. — Diess mag hinreichen.

Untersucht man diese Zeichen, so fällt sogleich auf, dass sie keineswegs nach einem und demselben Principe gebildet sind. Die ersten Operationen sind durch Linien und Punkte, die Potenzen durch locale Anordnung (x^m , $\sqrt[m]{x}$), die Logarithmen und die übrigen Urfunctionen durch abgekürzte Worte gegeben. Ebenso die trigonometrischen Functionen, die logologarithmischen Functionen, die elliptischen Functionen, die auch hier eingereiht werden, obgleich sie strenggenommen nicht hieher gehören, da sie Functionen mit doppeltem Eingange sind. — Die Differenzial- und Integral-Operationen sind sogar durch Buchstaben bezeichnet, wie die blossen Grössen, die, wenn sie nicht einzeln darstünden, zur grössten Verwirrung führen könnten. Würden nämlich für die anderen Operationen auch blosse Buchstaben eingeführt, so würden die Buchstaben bald Operationen, bald Grössen andeuten. Dadurch würde aber die ganze Sicherheit der Zeichensprache erschüttert werden. So lässt sich auch begreifen, warum *Newton* und seine Nachfolger mit solcher Hartnäckigkeit gegen die von *Leibniz* eingeführten Operationszeichen (d und $\int$) gekämpft haben. Doch ist glücklicher Weise die Klippe der Verwirrung noch vermieden worden, da diese Buchstaben so einzig dastehen, dass sie nicht mit den Zeichen der Grössen verwechselt werden können.

Die algebraischen Zeichen sind also keineswegs consequent gebildet worden, und dass sie dennoch das leisten, was sie wirklich leisten, kommt daher, dass sie nicht sehr viele sind, und dass die Inconsequenz in ihnen nicht so weit geht, dass sie Ver-

wechslungen herbeiführen könnte. Uebrigens hat selbst diese Inconsequenz der Bezeichnung, die dem Zufalle zugeschrieben werden muss, einiges Gute, was vielleicht bei einer ganz consequent durchgeführten Bezeichnungsart verloren gegangen wäre.

Wollte man aber eine consequente Zeichen-Sprache in die Mathematik einführen, so könnte diess auf doppelte Art geschehen, entweder dass die erste Bezeichnungsart durch Linien und Punkte auf die nachfolgenden Operationen übertragen, oder aber, dass die zweite Bezeichnungsart durch abgekürzte Worte auch auf die vorhergehenden Operationen angewendet würde. Die dritte Möglichkeit der Bezeichnung durch locale Anordnungen, wie sie bei den Potenzen üblich ist, bietet zu wenige Abwechslungen dar, als dass sie sich auf viele Operationen erstrecken könnte.

Es sind noch andere Bezeichnungsarten vorgeschlagen und gebraucht worden, die jedoch entschieden verworfen werden müssen.

Z. B. $c^a ? a$ statt $\log. c$. Das Fragezeichen darf nicht als Operationszeichen gebraucht werden, da es schon als Schriftzeichen eine anderweitige bestimmte Definition hat. Oder S_x , K_x u. s. w. statt $\sin. x$, $\cos. x$, u. s. w. Nimmermehr darf aber ein blosser *Buchstabe* zur Bezeichnung einer Operation gebraucht werden, da durch blosse Buchstaben die *Grössen* bezeichnet werden. Oder gar $\frac{1}{S} x$, statt $\arcsin. x$ u. s. w. Das Zeichen $\frac{1}{S}$ enthält eine angedeutete Division, und es soll aber dennoch eben so wenig eine Division, als etwa eine Differenz oder Radizirung ausdrücken. Wozu diese Unbehüllichkeit, die in den Symbolen der späteren Operationen die Symbole der früheren Operationen wiederholt, und sie doch nicht als wahre Operationen gelten lässt? Würde sich diess in der Wissenschaft geltend machen können, dass das einmal eine Operation durch ihre Symbole bezeichnet, das anderemal aber durch ihre Symbole nicht bezeichnet würde, wie z. B. $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{S}$, wo $\frac{a}{b}$ die Division, aber $\frac{1}{S}$ nicht die Division ausdrückte, so würde endlich die vollständigste Verwir-

rung eintreten müssen, die man doch schon durch die *gewöhnliche* Bezeichnungsart aufs Leichteste und für immer beseitigt hat.

Die Versuche einer consequent durchgeführten Zeichensprache stellen sich in folgendem Schema dar:

Namen der Operationen.	Erstes System.	Zweites System.	Drittes System.
	Das gewöhnliche System.	Bezeichnung durch Linien u. Punkte.	Bezeichnung durch abgekürzte Worte.
Addition.	$y = a + x.$	$y = a + x.$	$y = a \mid \textit{add. x.}$
Subtraction.	$y = a - x.$	$y = a - x.$	$y = a \mid \textit{subt. x.}$
Multiplication.	$y = a x.$	$y = a x.$	$y = a \mid \textit{mult. x.}$
Division.	$y = a : x.$	$y = a : x.$	$y = a \mid \textit{div. x.}$
Potenzirung.	$y = a^x$	$y = a \vdots x.$	$y = a \mid \textit{pot. x.}$
Radizirung.	$y = \sqrt[x]{a}.$	$y = a \overline{\vdots} x.$	$y = a \mid \textit{rad. x.}$
Logarithmirung.	$y = \log_a x.$	$y = a \underline{\cdot} x.$	$y = a \mid \textit{log. x.}$

Das zweite System der Bezeichnung durch Punkte und Linien würde bei weiteren Urfunctionen unstreitig sehr verwickelt werden. Es bleiben daher nur die Systeme mit abgekürzten Worten als die wirklich rationalen und consequenten Zeichensprachen übrig, die auch auf's Leichteste auf alle nachfolgenden Bereicherungen der Wissenschaft ausgedehnt werden können. Sie würden manches Missverständniss der ersten Rechnungsarten unmöglich machen; man würde z. B. auf der Stelle erkennen, dass die Zeichen *add.*, *subt.* (+) und (—) nicht Zeichen der Grössen, sondern Zeichen der Operationen seien, und viele Schwierigkeiten, die nicht selten mit den Untersuchungen über positive und negative Grössen verbunden sind, würden von selbst ihre Auflösung finden, da sie blosse Missverständnisse sind.

Man kann jedoch nicht hoffen, dass irgend eine consequente Bezeichnungsart Eingang finden werde, denn die gewöhnlichen

Zeichen sind zu tief eingewurzelt; und da sie auch nur wenige sind, so schliessen sie die Möglichkeit jedes Missverständnisses aus. Es ist daher mit Vernunft kein Grund zu irgend einer Aenderung vorhanden. Zudem hat selbst die Inconsequenz in der Bezeichnung ihr Gutes. Denn die ersten vier Operationen, die durch $(+, -, \cdot, :)$ bezeichnet werden, haben die Eigenschaft, dass ihre Grössen versetzt werden können, z. B.

$$a + b = b + a; a - b = -b + a; a m = m a, a : m = a \frac{1}{m} = \frac{1}{m} a.$$

Diess findet bei den nachfolgenden Operationen nicht mehr statt. Sie werden daher nicht mit Unrecht durch eigene Zeichen unterschieden. Die einfachsten und häufigsten Operationen sollen auch in ihren Zeichen etwas Ausgezeichnetes haben. — Bei den Potenzen, a^x , kann die Versetzung der Grössen nicht mehr statt finden, und aus diesem Grunde ist wahrscheinlich die Bezeichnungsart durch Lokal-Zeichen gewählt worden. Die nachfolgenden Operationen, wie die logarithmischen und trigonometrischen Functionen u. s. w., haben die Eigenschaft, dass sie in unendlichen Reihen von potenziellen Functionen gegeben werden können; für sie kann daher mit vollem Rechte die neue Bezeichnungsart durch abgekürzte Worte eingeführt werden, eine Bezeichnungsart, die aus diesem Grunde für alle nachfolgenden Operationen beibehalten werden muss. —

In der Mathematik ist eine analytische Zeichensprache möglich geworden, weil bereits bestimmte analytische Operationen bekannt und festgestellt sind. Die Operations-Zeichen entsprechen den Definitionen, (sie sind eigentlich die concentrirtesten Definitionen). Die Grössen-Zeichen a, b, c &c. entsprechen den Grössen, wie die Worte der Sprache den Begriffen, und zwischen diesen Zeichen und den Operationszeichen ist ein ähnlicher Unterschied, wie zwischen den Worten der Sprache und den wissenschaftlichen Definitionen. Die bestimmte Verbindung der Begriffe, welche jede Operation (wie auch jede Definition) auszeichnet, muss vorangehen, sie ist das Wirk-

liche und Erste, die Zeichen folgen nach; diess ist die Ordnung der Natur. Bei der Bereicherung und Förderung der Wissenschaften, bei wirklichen Entdeckungen wird diese Ordnung jedesmal eingehalten, und wenn sie in der Wiederholung der Wissenschaften nicht eingehalten wird, so ist diess ein verkehrtes Verfahren.

Der Mathematiker kann sagen: die Wahrheiten, die ich finde, sind entweder Summen oder Differenzen, oder Producte, oder Potenzen, Logarithmen u. s. w.; oder sie sind algebraische oder transcendente Ausdrücke, die aus jenen Operationen zusammengesetzt sind; alle Elemente, die in ihnen enthalten sind, können nur Verbindungen dieser festgestellten Operationen sein. Man kann auf Nichts stossen, was neu und unerwartet wäre, das mathematische Denken ist durch und durch bestimmt, und dem zweideutigen Zufalle kann neben dem sicheren Verstande kein Platz gegeben werden. Könnte man in einer andern Wissenschaft sagen, dass man dieses oder jenes Bestimmte finde, indem man auf diese oder jene bestimmte Art verfare, und dass alles Zusammengesetzte in diesen bestimmten Operationen enthalten sein müsse, dann wäre es Zeit, dass für diese bestimmten Operationen auch bestimmte Operations-Zeichen eingeführt würden. Aber ehe etwas Bestimmtes erkannt ist, ja ehe nur gewusst wird, was in dieser oder jener Wissenschaft wahrhaft zu suchen oder zu erkennen sei, oder *wie* es gesucht und erkannt werden solle, kann niemals ernstlich an die Bildung einer Zeichensprache gedacht werden. Es kann nichts bezeichnet werden, was noch gar nicht vorhanden ist.

Die Zeichen haben das unvergleichlich Gute, dass sie nöthigen, bestimmt zu denken. Wer bloss in Worten denkt, der kann wohl bestimmt denken, er kann aber auch bloss meinen, dass er bestimmt denke; wer hingegen in Zeichen denkt, der kann diess nicht meinen, er wird durch die Zeichen selbst erinnert, welches bestimmte Denken er habe, und in welchen bestimmten

Verbindungen er die Gegenstände seiner Wissenschaft erkenne. Wo überhaupt Symbole sind, da ist es ein Zeichen, dass bestimmt gedacht worden ist. Darum hat auch die Mathematik so grosse Fortschritte gemacht, weil sie vorher ihre Operationen mit grösster Schärfe bestimmen musste, ehe es ihr möglich war, Zeichen für sie einzuführen. Die Zeichen haben nicht diese magische Kraft, aber die ihnen vorausgehende Bestimmtheit des Denkens hat diese Kraft.

Es werden daher die verschiedenen Zeichensprachen nur möglich sein, wenn vorerst *bestimmte* Vernunft-Wissenschaften gefunden sind. — Niemals aber wird erlaubt sein, dass eine Wissenschaft einer andern feindlich in ihr Gebiet falle, und ihre Zeichen gleichsam raube. Jede Vernunft-Wissenschaft wird ihre eigenen Zeichen finden und bilden müssen. Jede Wissenschaft hat andere bestimmte Begriffe und andere bestimmte Verbindungen und Operationen; die Begriffe zwar können gleichförmig durch Buchstaben bezeichnet werden, diess schadet nichts; aber die Operationen müssen eigenthümlich bezeichnet werden, denn sie drücken ein ganz bestimmtes Denken aus, das nur in dieser und nicht in einer andern Wissenschaft enthalten ist. Was wesentlich verschieden ist, muss auch in wesentlich verschiedenen Zeichen dargestellt werden. Würde diess nicht eingehalten werden, so würde über kurz oder lang die allergrösste Verwirrung eintreten müssen.

Hierin ist *Leibniz* gescheitert, da er für alle Wissenschaften eine und dieselbe Zeichensprache gewollt hat. Höchstens könnte eine allgemeine Zeichensprache für die allgemeinen Vernunft-Wissenschaften, für Logik und Metaphysik in's Auge gefasst werden. Aber für diese kann es gar keine Zeichensprache geben. Denn da sie sich nur mit dem allgemeinen Denken beschäftigen, da sie nur die subjectiv nothwendigen Bedingungen untersuchen und feststellen, wie überhaupt alles Denken beschaffen sein müsse, damit es nicht mit sich selbst in Widerspruch gerathe, Untersuchungen, welche die Logik in

formaler und die Metaphysik in realer Beziehung durchführt — so gelangen sie gar nicht zu den ferneren Fragen nach den bestimmten, eigenthümlichen Operationen mit bestimmten Begriffen, und da sie die bestimmten Operationen nicht kennen lernen, so werden sie auch keine eigenen Zeichen nöthig haben. Für sie wird immer die allgemeine Wortsprache genügen können. Aber alle besondern Vernunft-Wissenschaften, die tiefer eindringen, die zu ganz bestimmten, exacten Verbindungen der Begriffe kommen, werden eine eigene Zeichensprache haben müssen, wenn sie ihren Aufgaben vollständig genügen wollen.

Die Worte der allgemeinen Sprache und die Symbole der Zeichensprache stehen in einem sehr genau unterscheidbaren Verhältnisse zu einander. In der Sprache wird der Zusammenhang zwischen den Worten und den durch sie bezeichneten Gegenständen durch Uebung und Gewohnheit hergestellt und erhalten; die Einsicht in diesen Zusammenhang ist fast zur zweiten Natur geworden. Ein Zusammenhang aber zwischen den Zeichen und den durch sie bezeichneten Gegenständen, zwischen den Zeichen a, b, c und z. B. zwischen den Begriffen, Raum, Zeit, Bewegung findet gar nicht statt, und muss erst jedesmal ausdrücklich hervorgehoben und bemerkt werden. Hingegen bei den Operationen, bei den Verbindungen des Denkens, ist das Umgekehrte der Fall. In der Sprache tritt die Einsicht in die Art und Weise, wie die Begriffe verbunden werden, ganz in den Hintergrund; es findet sich nur eine einzige unbestimmte Copula für diese Verbindungen, und doch ist diess das Wesen des Denkens; aber diess Wesen ist in der Sprache fast zur Gedankenlosigkeit herabgesunken. Die Zeichen jedoch, die für diese Operationen eingeführt werden, heben das bestimmte Denken auf eine ganz bestimmte Art hervor, und es findet zwischen diesen Zeichen und zwischen den durch sie bezeichneten Operationen ein unverlierbarer, durch *Wissenschaft* hergestellter und erhaltener Zusammenhang statt, z. B. zwischen

den Zeichen $(+)$, $(-)$, $(\times)$, $(;)$ u. s. w. und zwischen den durch sie bezeichneten Operationen.

Da nun alle Erkenntnisse in drei Stadien vollendet werden, in dem Stadium der Aufnahme und Uebersetzung der Begriffe, in dem Stadium der systematischen Denk-Operationen, und in dem Stadium der Interpretirung der gewonnenen Resultate in die Wirklichkeit; so wird auf's Deutlichste eingesehen, wie beide Hilfsmittel des Denkens, Sprache sowohl als Symbole, nothwendig nebeneinander bestehen, und sich gegenseitig unentbehrlich seien. Denn bei der Uebersetzung der Gegenstände und bei der Interpretation der gewonnenen Resultate ist es Hauptsache, und die grösste Erleichterung des Denkens, dass der Zusammenhang zwischen den Worten und den durch sie bezeichneten Gegenständen gleichsam von selbst und natürlich eingesehen werde, was eben die Sprache in so vorzüglichem Grade leistet; in der Systematik hingegen ist es Hauptsache, dass der Zusammenhang zwischen den Zeichen und den durch sie bezeichneten Operationen aufs Bestimmteste und auch gleichsam natürlich eingesehen werde, was eben die wissenschaftliche Zeichensprache in so vorzüglichem Grade leistet. Zwischen den Worten der Sprache und den Zeichen der Symbolen-Schrift besteht endlich ein wissenschaftlich hergestellter Zusammenhang, der durch die Definitionen erhalten wird. So werden die Schwierigkeiten der Erkenntniss getrennt und leicht gemacht; und weder Sprache allein noch Symbolik allein könnte getrennt von dem Andern das leisten, was sie wirklich leisten.

In der Sprache wird die Aufmerksamkeit auf die Begriffe und Gegenstände, nicht aber auf die Begriffe und Operationen gerichtet; würde beides verbunden, so würde das Eine wie das Andere verwirrt und unklar werden; in der Zeichensprache wird die Aufmerksamkeit auf die Begriffe und Operationen, und nicht auf die Operationen und Gegenstände gerichtet. Das Eine ist daher mehr eine Aufmerksamkeit nach Innen, das Andere mehr eine Aufmerksamkeit nach Aussen; und würden beide ununterschieden

verbunden, so würde das Eine wie das Andere verwirrt und unklar werden. So aber werden Sprache und Symbolik, und die aus ihnen hervorgehende wahre Wissenschaft auf die rechte Art mit einander bestehen können.

Noch ist ein Einwurf zu untersuchen, der nicht selten gegen die mathematischen *Erkenntnisse* vorgebracht wird. Es ist einleuchtend, dass da, wo einmal die Zeichensprache eingetreten ist, nur nothwendige und beweisbare Wahrheiten gefunden werden. Nun wird gesagt: die mathematischen Erkenntnisse sind starr und fest, sie sind wie todt, unbewegliche Erkenntnisse, sie können ja gar nicht anders gedacht werden, als sie wirklich sind; es ist dagegen ein hoher Vorzug der philosophischen Wahrheiten, dass sie auch anders sein könnten, als sie sind, dass sie die Freiheit der Erkenntniss in sich bewahren u. s. w.

Hier ist zu erwiedern, dass die wahre Erkenntniss diejenige sei, die ihren Gegenstand gerade so auffasst und durchdringt, wie er seinem Wesen und seiner Einrichtung nach ist. Wenn daher der Gegenstand kein anderer wird, so kann auch die Erkenntniss keine andere werden, als sie wirklich ist. Denn eine andere Erkenntniss würde auch einem andern Gegenstande, und nicht dem zu erkennenden Gegenstande, entsprechen. — Es kann allerdings der Fall sein, dass man in einem Gegenstande nur die eine oder die andere, nicht aber alle Seiten berücksichtigt habe; und dann können die unberücksichtigt gebliebenen Elemente weder unter die Erkenntnisse eingereiht, noch auch aus dem Gegenstande vertrieben werden. Sie müssen daher den Schein von subjectiver Willkühr hervorbringen, der nach der bekannten Verwechslung von Subject und Object als Freiheit des Objects gepriesen wird. — Aber setzen wir den Fall, dass *alle* Elemente, die in einem Gegenstande enthalten sind, durch und durch gewürdigt und erkannt seien, wird dann wohl die Erkenntniss eine andere sein können, als sie wirklich

ist, wenn der Gegenstand kein anderer wird? So lange freilich nicht alle Elemente erkannt sind, werden wohl die Erkenntnisse andere sein können, als sie wirklich sind; keine von ihnen wird die wahre sein. Jede von ihnen wird beweglich sein, denn sie sollen wirklich von dem angemassenen Platze der wahren Erkenntniss entfernt werden, sie fühlen es selbst, dass sie diesen Rang nicht behaupten können. Wenn aber die wahre Erkenntniss erschienen ist, wird auch sie von ihrem Platze beweglich, wird auch sie eine andere Erkenntniss sein können, als sie wirklich ist? — Es ist ein Spott auf die eigene Erkenntniss, wenn von ihr gepriesen wird, dass sie auch anders sein könnte, als sie wirklich ist; denn ist diess der Fall, so liegt es ihr ganz nahe, dass sie auch anders sein sollte, d. h. dass sie selber mangelhaft und irrthümlich sei. — Dass aber die Gegenstände so sind, wie sie sind, diess ist nicht bloss bei den mathematischen Gegenständen, sondern bei allen Gegenständen aller Wissenschaften der Fall. So wenig die Mathematik ihre Gegenstände ändern kann oder will, so wenig wird die Philosophie ihre Gegenstände ändern können oder wollen, und erscheinen ihr die mathematischen Erkenntnisse starr und unbeweglich, so werden ihr auch einmal ihre eigenen Gegenstände so erscheinen, wenn sie erkannt sein werden, wie sie erkannt sein sollen. Jede wahre Wissenschaft erkennt, dass die Gegenstände nur so sind, wie sie eingerichtet sind, und dass, wenn sie verändert würden, auch die Erkenntnisse verändert würden, aber dessenungeachtet wieder starr, fest und unbeweglich wie die Gegenstände selbst sein müssten. Denn durch die Erkenntnisse werden nicht die Gegenstände bewegt, sondern der erkennende Geist wird bewegt, er wird aus der Unwissenheit zur Wissenschaft erhoben. Dass aber die Gegenstände etwa aus sich selber, oder gar aus einer nothwendigen Erkenntniss zur Starrheit und Unbeweglichkeit bestimmt werden können, wie von den mathematischen Gegenständen *gemeint* wird, diess ist ein Vorurtheil und ein Irrthum

Derjenigen, die ausserhalb der Wissenschaft stehen. Die Wissenschaft ist gerade das Befreiende von diesem Irrthume, denn sie zeigt, dass die Gegenstände in sich keinen Grund haben, so oder anders zu sein (*was eben zu dem subjectiven Wege der Methode und Wissenschaft nöthigt*), sie zeigt, dass die Gegenstände nur durch etwas über ihnen Seiendes bestimmt sind, so zu sein, wie sie wirklich sind. Und diess gilt von allen Gegenständen unserer Erkenntniss, nicht bloss von den mathematischen Gegenständen.

Wenn diess in andern Wissenschaften nicht so auffallend ist, wie in der Mathematik, so kommt es daher, weil in ihnen nur Einiges beachtet wird, und das Meiste unberücksichtigt bleibt. Dasjenige, was nicht in die Erkenntniss eintritt, aber doch nicht aus dem Gegenstande vertrieben werden kann, weil es erklärt zu werden verlangt, kann wohl Willkühr und den Schein von Freiheit, aber nicht wahre Freiheit verleihen; die wahre und wirkliche Freiheit der Erkenntniss wird durch die Wissenschaft allein errungen. Es giebt nichts Unbestimmtes in der Welt, darum soll es auch nichts Unbestimmtes in der Wissenschaft geben, ja die Wissenschaft soll gerade desshalb eintreten, damit endlich einmal alle Unbestimmtheit und alle Unwissenheit vertrieben werde.

Achte Untersuchung.

Ueber die Axiome.

Indem wir die Axiome und Beweise, die ganze Ordnung und Begrenzung der menschlichen Erkenntnisse festzustellen suchen, beginnen wir ein Unternehmen, das zu dem Anziehendsten und Erhabensten der ganzen Wissenschaft gehört. Was jemals Grosses und Dauerndes in Wissenschaft und Erkenntniss geleistet worden ist, ist aus diesem einen Grundgedanken hervorgegangen, dass das unbestimmt Endlose, von dem nicht abzusehen wäre, was noch Alles hinzukommen sollte, als ein bestimmt Begrenztes erkannt und nachgewiesen werde, so dass in allen nachfolgenden Gliederungen der Wissenschaften nichts weiter hinzukommen könne, was nicht schon in ihren ersten Schritten selber enthalten wäre.

Bei der Lehre von den Definitionen sind wir auf die Schwierigkeiten gestossen, dass die Definitionen eigentlich vor den Definitionen, also vor sich selber dasein sollten, was unmöglich ist. Diese Schwierigkeiten können nicht gelöst werden, wenn man nicht an etwas Anderes, als bloss an die Definitionen denken will. Es ist aber gezeigt worden, dass es etwas Anderes, dass es die Sprache sei, die allen Definitionen *naturgemäss* vorausgehe, und dass die hervorgehobenen Schwierigkeiten nicht Schwierigkeiten der Definitionen, sondern der Sprache seien, und auch durch Sprache aufs Vollständigste gelöst und überwunden werden.

Bei den Beweisen treten ähnliche Schwierigkeiten ein. Die Beweise sollten auch schon *vor* sich selber dasein, wenn Alles bewiesen werden sollte. Dass diess aber unmöglich sei, ist einleuchtend. Wir werden uns also das Verständniss über die Beweise auch nur dadurch aufzuschliessen vermögen, dass wir vollkommen einsehen lernen, dass die Beweise ihrer Natur nach ebenfalls etwas Zweites seien, also auch nur als zweite Operationen des Denkens begriffen werden können. — Die Beweise sollen den nothwendigen Zusammenhang neuer Sätze mit schon bewiesenen und wahren Sätzen darthun. Man wird von ihnen nicht mehr verlangen können, als was in ihnen enthalten ist. Da sie nämlich den Zusammenhang mehrerer Sätze darthun sollen, so sollen sie auch nur die Wahrheit dieses Zusammenhangs, dieser Abhängigkeit des einen Satzes von einem andern Satze zeigen. Sie werden also ihrer Natur nach nur relative Wahrheiten geben können, gerade so wie die Definitionen und Symbole nur relative Bestimmtheiten gegeben haben. Eine zweite, abhängige Wahrheit kann in Bezug auf eine andere Wahrheit, die mit der ersten im Widerspruche steht, eine relative Unwahrheit sein, ja sie muss sie sogar sein. Wenn b mit a in einem nothwendigen Zusammenhange steht, so ist b eine relative Wahrheit zu a . Wenn aber c mit a im Widerspruche steht, so ist auch b im Widerspruche mit c , und ist eine relative Unwahrheit zu c .

Es wird ein erster Satz aufgestellt, der in Bezug auf Wahrheit nicht von den Beweisen abhängig ist, da die von den Beweisen bedingte Wahrheit oder Unwahrheit nur in der Verbindung zweier oder mehrerer Sätze beruhen kann. Nun werden durch Beweise mehrere Sätze mit diesem ersten Satze zum Systeme einer Wissenschaft verbunden. Alles, was die Beweise betrifft, kann vollkommen wahr und streng und richtig sein, aber die Wissenschaft ist darum noch nicht eine wahre Wissenschaft, sie kann wahr, oder falsch sein, je nachdem der erste Satz wahr oder falsch ist. Ist der erste Satz wahr, so sind alle

Sätze wahr, und mit ihnen die ganze Wissenschaft, wenn die Beweise richtig sind; ist aber der erste Satz falsch, so sind alle nachfolgenden Sätze und mit ihnen die ganze Wissenschaft falsch, obgleich die Beweise richtig sein mögen. Ihren Inhalt, ihre wesentliche Wahrheit erhalten alle Sätze einer Wissenschaft von ihrem ersten Satze; und Wahrheit findet sich in allen folgenden Sätzen nur in so weit, als sie mit dem ersten Satze in einem nothwendigen Zusammenhange stehen. Verwechselt man nun die relative und die wesentliche Wahrheit der Sätze, und glaubt man, dass es Aufgabe der Beweise sei, wesentliche Wahrheit zu geben, während sie nur relative Wahrheit geben können und sollen, so werden ähnliche Schwierigkeiten, wie bei den Definitionen, auftauchen, und auch nur auf ähnliche Weise gelöst werden können.

Da nämlich die Beweise nur die systematischen, relativen Wahrheiten des Zusammenhangs geben, so werden ihnen nicht aus Noth oder Unbehüllichkeit, sondern wesentlich und naturgemäss Sätze vorausgehen, die selber nicht von diesen Beweisen abhängig sein können. Diese Sätze werden *Axiome* genannt, und jede Wissenschaft wird ihre Axiome haben müssen, obgleich es der Fall sein kann, dass ein Axiom einer späteren Wissenschaft ein bewiesener Satz einer früheren Wissenschaft sei, was eben die gegenseitige Ordnung und Abhängigkeit der Wissenschaften bedingen wird.

In der Lehre von den Axiomen sind folgende Fragen zu beantworten: 1) Wird eine vollkommene Wissenschaft nur ein einziges Axiom, oder aber mehrere Axiome haben können? 2) Wie werden die Axiome jeder Wissenschaft gefunden und als Axiome erkannt werden können? 3) Werden die Axiome in unbestimmter und unbegrenzter Anzahl vorhanden sein, so dass die menschlichen Erkenntnisse nicht abgegrenzt und geschlossen werden können, oder werden die Axiome in bestimmter, begrenzter, übersichtlicher und erkannter Anzahl gegeben werden müssen?

Es ist fast überflüssig, die ersten, oberflächlichen Aussprüche zu berichtigen, dass die Axiome jeder Wissenschaft ganz klare, unmittelbare, und sich von selbst verstehende Wahrheiten seien, in denen nichts weiter gedacht und gelernt werden könne. Es würde sehr angenehm sein, wenn solche Sätze, wie die Axiome, welche ganze Wissenschaften beherrschen, und ihnen alle Wahrheiten mittheilen, von selbst gefunden und eingesehen werden könnten. Unmöglich können sie blosse Einfälle sein, etwas Abgerissenes und Gemeines, das aus Gewohnheit als für sich bestehend angesehen würde; sie müssen vielmehr ganz erlesener Natur sein, und weit entfernt an der Oberfläche zu verweilen, in die tiefsten Tiefen der menschlichen Erkenntniss hinabführen, so dass sie auch nicht unmittelbar, sondern in sehr reicher Vermittlung, ja vielleicht erst im Verlaufe einer ganzen wissenschaftlichen Erfahrung erkannt werden können. Keine Wissenschaft mit Ausnahme der Mathematik hat noch ihre Axiome gefunden, zum Beweise, dass diese keineswegs so leicht und oberflächlich, als man etwa glaubt, dass sie vielmehr das Schwerste und Verborgenste von Allem sein werden. Darin unterscheiden sich unsere Axiome wesentlich von denen, die sonst als solche angeführt werden.

In der Lehre von den unmittelbaren Wahrheiten, die ohne alles Denken klar und bewiesen sein sollen, ist *Locke* Meister. *Leibniz* war immer ihr Gegner, und suchte sie so viel als möglich zu verringern, und in Lehrsätze umzuprägen, was ihm auch mit vielen vorgeblichen Axiomen gelungen ist. — Was ist denn die wahre Folge einer solchen Lehre von den unmittelbaren Wahrheiten? Keine andere, als dass man es niemals zu irgend einer Wissenschaft bringen könne. Denn nimmt man die ersten Wahrheiten als unmittelbar gewisse Wahrheiten, unter denen nichts weiter gedacht wird, so wird auch unter den nachfolgenden Wahrheiten nichts weiter gedacht werden, als eben die *Leerheit*, die aus den ersten unmittelbaren Sätzen auf sie überfliessen wird. Streng genommen wird man aber zu

den nachfolgenden Sätzen gar nicht gelangen, da in der unmittelbaren Gewissheit nichts liegt, was zur Entfaltung einer Wissenschaft antreiben könnte. Die nachfolgenden Sätze werden nur angereicht, weil sie bereits als vorhandene Wahrheiten angetroffen werden. Sie sind aber von Andern aufgestellt worden, von Solchen, die etwas Anderes als unmittelbare Wahrheiten gesucht und gefunden hatten. Die Lehre von den unmittelbaren Wahrheiten ist zwar im Stande, eine bereits vorhandene Wissenschaft zu verderben, und ganz leer und bedeutungslos zu machen, nicht aber selber eine Wissenschaft hervorzubringen, und zu erfüllen, da in der unmittelbaren Gewissheit alle Unruhe des Geistes, alle zur Entfaltung einer Wissenschaft treibende Macht untergegangen ist.

Das Nächste ist nun, dass bestimmt erkannt werde, dass in jeder ursprünglichen Wissenschaft *ein* Axiom, und nicht mehr als dieses eine Axiom enthalten sein könne. *Ein* Axiom ist nothwendig, weil allen nachfolgenden Sätzen Inhalt und Wahrheit aus einem ersten Satze mitgetheilt werden sollen. Aus demselben Grunde ist es aber unmöglich, dass mehrere Axiome gemeinschaftlich an der Spitze einer und derselben Wissenschaft stehen. Denn sind diese Axiome so beschaffen, dass sie auf keine Weise von einander abgeleitet werden können, so bilden sie eben so viele von einander unabhängige Wissenschaften, als Axiome an ihrer Spitze stehen. Denn jedes Axiom enthält nur eine bestimmte Verbindung der Begriffe, diese bestimmte Verbindung bildet die Einheit der Erkenntniss; und die Einheit der Erkenntniss, nicht die Einheit des Stoffes, bestimmt die Einheit einer Wissenschaft. Diess muss vor Allem festgehalten werden, wenn Klarheit und Gedicgenheit, Wissenschaft wie aus einem Gusse hervorgehen soll. Stünden mehrere Axiome an der Spitze einer Wissenschaft, so könnten sie entweder in einen einzigen Ausdruck zusammengefasst werden, und dann wäre dieser *eine* Ausdruck das allgemeine Axiom; oder wenn diese Ableitung und Zusammenfassung, der Sache nach selbst unmöglich wäre,

dann dürfte nicht *eine* Wissenschaft, sondern es müssten eben so viele Wissenschaften anerkannt und gebildet werden, als primitive Axiome vorhanden wären. Wollte man sie aber dennoch in eine einzige Wissenschaft vereinigen, so wäre diess nur ein Beweis eines noch sehr jugendlichen und unausgebildeten Zustandes der Wissenschaft, der sich bei fortwährender Elementarisirung und Cultur von selbst aufheben, und entweder die Einheit der Axiome zur Folge haben, oder eben so viele wirkliche Wissenschaften herausstellen müsste, als primitive Axiome vorhanden wären. So ist es der Metaphysik ergangen, die anfangs Alles umfassen wollte, und endlich in der Elementarisirung der Wissenschaften so weit gekommen ist, dass sie fast nicht mehr angeben kann, was ihr wohl übrig geblieben sei. Diese Trennung der Wissenschaften ist nicht ein Rückschritt, sondern ein Fortschritt; denn je mehr Eigenthümliches getrennt und einzeln untersucht wird, desto klarer werden auch die einzelnen Wissenschaften selbst werden.

Man könnte nun dagegen einwenden, dass selbst die Mathematik mehrere Axiome habe, ohne dass darum die Einheit ihrer Erkenntnisse verloren gehe. Mehrere Axiome? Wir werden diess bezweifeln dürfen. Einzelne Lehrbücher der Mathematik können mehrere Axiome aufzählen, aber die Mathematik selbst, wird sie mehrere Axiome haben können oder nicht? Man wird vielleicht auf die Axiome der Euklid'schen Elemente hinweisen. Aber nennt sie Euklid Axiome? Er nennt sie *κοινὰ ἔννοια*, gemeinschaftliche Erkenntnisse, nicht Axiome. Und welcher Art sind diese gemeinschaftlichen Erkenntnisse? Sie sind: Was demselben gleich ist, ist auch unter sich selbst gleich; Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches; Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches; Gleiches zu Grösserem addirt, giebt Grösseres u. s. w. Man ergänze aber diese Sätze durch alle Sätze, die nothwendig mit ihnen zusammenhängen, wie: Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches; Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches; Gleiches zu gleichen Potenzen

erhoben, giebt Gleiches; die Logarithmen gleicher Grössen sind gleich, oder aus gleichen Gleichungen wird Gleiches gefunden u. s. w.; so wird man ein Inhaltsverzeichniss, ein Gerippe unserer heutigen Analysis haben. Die Euklid'schen Axiome sind nichts mehr und nichts weniger, als ein Minimum von analytischen Sätzen, zu denen es das Alterthum gebracht hat, und deren sich Euklid in seinen geometrischen Beweisen bedienen musste. Sie sind nicht Geometrie, darum werden sie auch nicht in der Geometrie bewiesen, so wenig als unsere heutige Analysis in der Geometrie bewiesen wird, obgleich sie in ihr angewendet wird. Hätte Euklid statt einer Geometrie eine Analysis schreiben wollen, so würde er diese Sätze ebenso bewiesen haben, wie die heutige Analysis ihre Sätze beweist. Die Analysis zweifelt gar nicht daran, dass es ihre wesentlichste Aufgabe sei, ihre Sätze zu beweisen. Weil aber Euklid nicht eine Analysis, sondern eine Geometrie geschrieben hat, so hat er die analytischen Sätze, die in der Geometrie unentbehrlich sind, einfach vorausgesetzt; und ob er sie als Axiome genommen habe, oder nicht, geht daraus noch nicht hervor, dass er sie einfach als analytische Sätze vorausgesetzt hat.

Es ist nun zu untersuchen, wie die Axiome der Vernunft-Wissenschaften, sowohl der allgemeinen, als der besondern, gefunden werden. Die allgemeinen Vernunft-Wissenschaften, Logik und Metaphysik, sind solche, in welchen die widerspruchslöse Verbindung der Begriffe überhaupt untersucht wird; die besondern Vernunft-Wissenschaften aber sind solche, in denen ein bestimmter Inhalt, eine bestimmte Verbindung bestimmter Begriffe gegeben und bewiesen wird. Diess giebt eine sichere und für alle Fälle zureichende Unterscheidung der allgemeinen und besondern Vernunft-Wissenschaften. Die Axiome der bestimmten Vernunft-Wissenschaften werden daher diejenigen Sätze sein, welche ausdrücken, auf welche bestimmte und besondere Art in diesen Wissenschaften gedacht und erkannt wird.

Das natürliche Verfahren, diese Axiome zu finden,

besteht darin, dass man die Voraussetzungen jeder Wissenschaft zu einem ersten Lehrsatze macht, und als (mögliche oder wirkliche) Wahrheit hinstellt.

In jeder Wissenschaft sind drei Zustände zu unterscheiden, die vorausgehende Uebersetzung oder Aufnahme der Gegenstände in das Denken, dann die systematische oder axiomatische Ordnung des Denkens und endlich die nachfolgende Interpretation der gewonnenen Resultate. Das Axiom einer jeden Wissenschaft wird daher das allgemeine *Schema* sein, nach welchem die Gegenstände dieser Wissenschaft wahrgenommen und aufgenommen werden. Aber gerade in denjenigen Gesetzen, in welchen die Gegenstände wahrgenommen werden, werden sie auch erkannt, d. h. auf bestimmte Art unter sich in Verbindung gebracht werden. Das Schema der Wahrnehmungen ist daher zugleich auch das Axiom der systematischen Erkenntnis, es ist das Ende des ersten und der Anfang des zweiten Zustandes der Wissenschaft. Die endliche Interpretation der gefundenen Resultate auf die wirklichen Gegenstände muss dann genau wieder dem Schema ihrer Wahrnehmungen und Verbindungen entsprechen. So ist das Axiom auch die *Norm* der Interpretation der apriorischen Erkenntnisse auf die Wirklichkeit, die wahrhaft erkennbare und innerste Wahrheit aller Wirklichkeit.

Um an einem Beispiele zu zeigen, wie die Axiome gefunden, und an die Spitze aller aus ihnen ableitbaren Wahrheiten einer Wissenschaft gestellt werden können, wollen wir das mathematische Axiom und die aus ihm hervorgehenden ersten Sätze der Analysis entwickeln. Die ferneren Wahrheiten über die Einheit und Nothwendigkeit der Axiome aller Vernunft-Wissenschaften, und über die ganz bestimmte Anzahl und Einschränkung derselben werden dann gleichsam von selbst ange-
reicht, und ohne Schwierigkeit eingesehen werden können.

Untersucht man die Beweise der Mathematik, so findet man, dass in allen Sätzen die zwei Sätze enthalten sind: dass Gleiches statt Gleichem substituirt Gleiches gebe; und dass in allen Ope-

rationen dasselbe Resultat hervorgehe, in welcher Ordnung auch die einzelnen Grössen verbunden oder addirt werden mögen, dass z. B. $a + b + c = a + c + b = b + a + c$ sei u. s. w. In einem dieser Sätze wird also das Axiom der Mathematik enthalten sein müssen.

Der erste Satz, dass Gleiches statt Gleichem gesetzt, Gleiches gebe, wird mit geringen Abänderungen in allen Wissenschaften gelten müssen. Er wird also das Axiom der vorausgehenden Logik oder Metaphysik sein, wenn die Gleichheit im allgemeinen, nicht im streng mathematischen Sinne, genommen wird. — Denn diess ist die Voraussetzung des Denkens selbst, dass man das Gefundene für das Gesuchte, das Bekannte für Unbekannte setzen dürfe. Denn da wir durch das Denken das Unerkannte erkennen sollen, so müssen wir auch das Erkannte statt des Unerkannten setzen und gebrauchen dürfen: Würde dieser Satz nicht gelten, dass dasselbe (ohne Aenderung der Wahrheit) hervorgehen müsse, wenn das durch richtiges Denken Gefundene für das Gesuchte gesetzt werde, so würden alle Erkenntnisse mit der Wurzel abgeschnitten sein.

Das mathematische Axiom wird daher mehr in dem zweiten Satze gesucht werden müssen, dass dasselbe Resultat hervorgehe, in welcher Ordnung auch die einzelnen Grösseu addirt werden mögen. Dieser Satz ist mathematischer Natur, und da er in allen übrigen Sätzen enthalten ist, so wird er entweder selbst das Axiom der Mathematik sein, oder doch mit diesem Axiome verwandt sein müssen.

Es wird bei der Bildung der Wissenschaften von der Verbindung der Begriffe ausgegangen, denn diess ist das Denken selbst. Da in den besonderen Vernunft-Wissenschaften das Denken ein bestimmtes Denken ist, so wird auch die Verbindung ihrer Begriffe eine bestimmte Verbindung sein müssen. Eine bestimmte Verbindung wird z. B. gesetzt, wenn die verbundenen Begriffe eine solche Verbindung bilden, welche ihrem Wesen nach gleichartig ist mit jedem einzelnen der verbundenen Be-

griffe. Wird diese Art der Verbindung Addition genannt, so ist diess ihre Definition, und wird sie an die Spitze einer Wissenschaft gestellt, so entsteht das Axiom, dass zwei Begriffe addirt einen neuen Begriff geben. Derjenige, der die Addition zuerst an die Spitze einer Wissenschaft gestellt hat, hat sie auch zuerst erkannt, und die Uebrigen müssen sie erwerben und inne werden, sie müssen einsehen, dass sie dieselbe in Wahrheit schon lange gehabt haben, ohne zu wissen, dass sie sie hatten.

Nun wird aber doch ein Unterschied zwischen dem verbundenen Ganzen als solchem, und zwischen den verbundenen Begriffen sein. In den verbundenen Begriffen ist immer noch das verbundene Einzelne enthalten und sichtbar, weil die Begriffe einzeln gekannt werden; aber in der Verbindung als solcher sind die einzelnen Begriffe untergegangen, denn sonst wäre diese Verbindung nichts Neues, sondern mit den verbundenen Begriffen tautologisch. Z. B. wenn Fünf und Sieben Zwölf geben, so sind in den verbundenen Begriffen (Fünf und Sieben) diese einzelnen Begriffe sichtbar, aber in der Verbindung selbst, in *Zwölf*, sind sie nicht mehr sichtbar und ausdrücklich als solche enthalten. Zwölf kann auch eine Verbindung anderer Begriffe sein, wie von Eins und Eilf u. s. w.

Der Unterschied zwischen den verbundenen Begriffen und der Verbindung selbst, kann nun ein wesentlicher Unterschied sein, oder nicht. Ist er wesentlich, so kann er vielleicht eine Wissenschaft bestimmen, die wir jetzt ausser Acht lassen; ist er nicht wesentlich, sondern vielmehr gleichgültig, so dass auf ihn keine weitere Rücksicht genommen wird, so wird er auch eine Wissenschaft bestimmen können, bei der wir verweilen werden. Aber in ihr muss dann ausgesprochen werden. (weil es schon in der Art der Verbindung wesentlich mitgedacht wird) dass die nämliche Verbindung nicht bloss aus diesen verbundenen Begriffen, sondern auch aus andern verbundenen Begriffen, nicht bloss in dieser, sondern auch in einer andern Ordnung der

Verbindung hervorgehen könne, weil sonst gerade in diesen Begriffen und in dieser Ordnung der Verbindung etwas läge, was dieses Ganze auf diese Art gäbe, so dass in ihnen etwas *Eigenthümliches* enthalten sein müsste. Diess ist aber gerade durch die Voraussetzung aufgehoben worden.

Nun muss in allen Wissenschaften die neue Verbindung für die verbundenen Begriffe gesetzt werden können, da diess eben das Denken selbst ist, dass aus Vorausgehendem etwas Neues hergestellt werde, das auch für das Vorausgehende genommen werden könne. Diess ist nichts Eigenthümliches der Mathematik, es gehört der Logik an, und ist ihr Axiom, ihr erster Satz, welcher systematisch an ihren Anfang gestellt werden muss. Aber die besondere Art des Zusammenhangs, der zwischen der Verbindung als solcher und zwischen den verbundenen Elementen besteht (die Addition), wird der Mathematik, oder irgend einer andern bestimmten und besondern Wissenschaft eigenthümlich sein. Nennen wir diese bestimmte Art des Zusammenhanges *Gleichheit*, so wird der Satz mathematisch heissen: c ist gleich $a + b$, oder $c = a + b$, oder auch, da die Ordnung der Verbindung gleichgültig ist: $c = b + a$, und in der Mathematik wird c für $(b + a)$ und $b + a$ für c gesetzt werden können. Diess wird durch das Wort *Gleich* und durch das Zeichen $(=)$ ausgedrückt. Diess ist auch die Definition des Wortes und des Zeichens. *Gleichheit in diesem Sinne* wird nicht in anderen Vernunft-Wissenschaften vorkommen können, denn sonst müssten sie dieselbe Art der Verbindung der Begriffe, d. h. Addition, haben, und selbst Mathematik sein. Und wenn das Wesen der mathematischen Verbindungen in der Gleichheit besteht, so werden alle mathematischen Sätze durch Gleichheit, oder durch Gleichungen bewiesen werden müssen. — Nennt man die Verbindung als solche das *Ganze*, die einzelnen verbundenen Begriffe aber Theile, so wird der erste mathematische Satz sein: Das Ganze ist gleich seinen Theilen, und durch den Begriff der *Gleichheit* kann dieser Satz nur

für die Mathematik, nicht aber für andere Vernunft-Wissenschaften gelten. Alle diese Sätze gehen aus der Verbindung des Axioms mit den Definitionen hervor.

Es wird daher als Axiom der Mathematik der Satz aufgestellt: Das Ganze ist gleich seinen Theilen. Nennt man die verbundenen Begriffe, weil sie nicht mehr auf allgemeine Art, sondern auf bestimmte Art verbunden sind, nicht mehr *Begriffe*, sondern *Grössen*, so können sie in diesem Sinne nur in der Mathematik vorkommen, und Grössen können nur mathematisch und nicht anders verbunden werden. Dann wird das Axiom lauten: Zwei Grössen addirt, geben wieder eine Grösse, oder: Zwei addirte Grössen sind gleich einer dritten Grösse, in welcher Ordnung sie auch addirt werden mögen.

Um nicht eine Verallgemeinerung zu setzen, die wir später vielleicht einzuschränken genöthigt sein würden, dass alle Grössen in jeder Beziehung zu einem Ganzen zusammengesetzt werden können, gehen wir von dem *Ganzen* aus, und nennen seine beliebigen und gleichgültigen Theile *gleichartige* Grössen, so dass das Axiom eingeschränkt lautet: Zwei gleichartige Grössen addirt, geben wieder eine gleichartige Grösse. Und da die Ordnung der Addition willkürlich ist, so gilt auch der Satz: Zwei gleichartige Grössen beliebig addirt, geben eine dritte und nämliche Grösse. Unter Grössen werden wir in den folgenden Sätzen immer gleichartige Grössen denken.

Ist aber $a + b = c$ und $b + a = c$, so muss auch $a + b = b + a$, oder allgemeiner: ist $a + b = c$ und $m + n = c$, so muss auch $a + b = m + n$ sein. Denn da nach dem ersten Satze der Logik, das verbundene Ganze für die verbundenen Theile gesetzt werden darf und muss, so folgt aus dem Satze $a + b = c$, wenn statt c (aus dem zweiten Satze) $(m + n)$ gesetzt wird, der neue Satz: $a + b = m + n$. Dieser Satz ist nicht deshalb mathematisch, weil man Begriffe statt Begriffen substituirt, sondern deshalb, weil man Grössen statt Grössen nach der Gleichheit oder in Gleichungen sub-

stituiert. Wird dieser Satz als das wahre mathematische Axiom ausgesprochen: *Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich selbst gleich*, so können die vorbergehenden Sätze als Elementarisirungen gelten, die zum Verständnisse dieses Axioms wesentlich und nothwendig sind. Dieses Axiom kann auch allgemein ausgesprochen werden: Was demselben gleich ist, ist auch unter sich selbst gleich, und bleibt dennoch mathematisch, weil es die Verbindung der Gleichheit hat. Es ist aber so in seiner allgemeinsten und freiesten Form, und von den Begriffen der Gleichheit abgesehen, müssen die Axiome aller Vernunft-Wissenschaften ähnlich lauten, indem überall Bekanntes und Unbekanntes durch ein drittes Bekanntes verbunden werden müssen, indem jede Wissenschaft die Aufgabe hat, Unerkanntes durch Erkanntes zu erkennen.

Stellt man diesen Satz unmittelbar als Axiom der Mathematik auf, so kann diess hingehen. Immerhin aber wird es besser sein, wenn dieses Axiom in seine wahren Elemente zerlegt wird. Jedenfalls wird man sich etwas Bestimmtes darunter denken müssen, und thut man diess, so muss man unfehlbar auf die bereits aufgestellten Elemente des Axioms kommen. Es muss nämlich die Forderung gestellt werden, dass Alles, was mathematisch verglichen wird, doch in etwas von einander verschieden sein müsse, nämlich in den Operationen; denn der Fortschritt der Methode besteht darin, dass das Einfache, und das aus Einfachem Zusammengesetzte verglichen werde. Wäre diess nicht der Fall, so würde nicht Verschiedenes, sondern Dasselbe mit sich verglichen, und man bliebe auf derselben Stelle, während gerade das Axiom auch den Fortschritt einer Wissenschaft enthalten und ausdrücken soll.

Ordnet man alle diese Sätze, so geht daraus das System der Analysis hervor.

Lehrsatz (aus der Logik). Alles Denken besteht in der Verbindung von Begriffen, und alles bestimmte Denken besteht in einer bestimmten Verbindung bestimmter Begriffe.

Definition. Diejenige bestimmte Verbindung der Begriffe, in welcher die verbundenen Begriffe unter sich, und mit dem resultirenden Begriffe (dem Ganzen) gleichartig sind, wird *Addition* genannt.

Anmerkung. 1) Es folgt aus dieser Definition, dass ungleichartige Begriffe mathematisch nicht addirt werden können.

Anmerkung. 2) Der Begriff des mathematisch Gleichartigen wird aus der Zeichnung oder aus der Wirklichkeit erläutert, wie bei der Lehre von den Definitionen ausgeführt worden ist.

Axiom. Es geht aus der Addition dasselbe Resultat hervor, in welcher Ordnung auch die einzelnen Begriffe addirt werden mögen. (In der mathematischen Zeichensprache wird diess so ausgedrückt: $a + b + c + \dots = (a + b) + c, \dots = a + (b + c) + \dots = (b + a) + c \dots$ Die Klammern z. B. in $(a + b) + c \dots$ zeigen an, dass zuerst a zu b , und dann zu diesem Ganzen $c + \dots$ addirt worden sei).

Definition. Die hergestellte Verbindung wird das *Ganze*, die verbundenen Begriffe werden die Theile des Ganzen genannt. Z. B. in $a + b = c$, ist c das Ganze, a und b aber sind Theile des Ganzen.

Definition. Die durch Addition gefundene Zusammensetzung wird die Summe genannt, z. B. $(a + b)$ ist die Summe. Die einzelnen Theile heissen Summanden.

Definition. Die durch Addition verbundenen Begriffe werden nicht mehr Begriffe schlechthin, sondern *Grössen* genannt. Und da das Ganze mit den einzelnen verbundenen Begriffen gleichartig ist, so ist das Ganze ebenfalls eine Grösse.

Zeichen. Das Zeichen für die Addition ist $(+)$ und wird *plus* ausgesprochen.

Lehrsatz (aus der Logik). Es darf das durch Denken Gefundene für das Gesuchte gesetzt werden. So darf die Summe für das Ganze, $(a + b)$ für c , gesetzt werden.

Zeichen. Das Zeichen, welches ausdrückt, dass der eine Ausdruck für den andern, unbeschadet der Wahrheit, gesetzt

werden dürfe, ist ($=$), das Zeichen der Gleichheit. Es wird daher $a + b = c$ gesetzt.

Zusatz (zu dem Axiome). Da z. B. in $a + b = c$ die Grösse c , die Summe anderer Grössen ($a + b$) ist, so muss auch jede einzelne Grösse a, b , als die Summe anderer Grössen genommen werden können, z. B. $a = m + n$, da das Ganze c mit den einzelnen Grössen a, b gleichartig ist. Wäre diess nicht der Fall, so würde es gerade in den Grössen a, b, c als solchen liegen, dass sie addirt ein Ganzes bildeten; sie würden also etwas Eigenthümliches haben, was nicht in allen Grössen in Bezug auf Operationen gedacht werden könnte. Diess ist aber durch das Axiom ausgeschlossen worden. Darum können auch die Grössen als diejenigen Begriffe definirt werden, die beliebig vermehrt (und vermindert) werden können.

Lehrsatz. Grössen, die derselben Grösse gleich sind, sind auch unter sich selbst gleich. Wenn z. B. $a + b = c$, und $m + n = c$, so ist auch $a + b = m + n$.

Beweis. Wird in dem ersten Satze (Ausdruck, Gleichung) $a + b = c$; statt c die in der zweiten Gleichung gegebene gleiche Grösse $c = m + n$ substituirt (nach dem Axiome der Logik), so folgt: $a + b = m + n$, was zu beweisen war.

Definition. Werden Summen und einzelne Theile (Summanden) verglichen, so werden die Summen das *Grössere*, die Summanden aber einzeln das *Kleinere* genannt.

Zeichen. Die Zeichen: ($>$), ($<$); $a + b > a$, $a + b > b$, $a < a + b$ u. s. w. drücken aus, dass $a + b$ grösser sei als a , oder dass a kleiner sei als $a + b$ etc.

Zusatz. Es muss also zur kleineren Grösse (a) eine neue Grösse (b) addirt werden, damit sie der grössern Grösse ($a + b$), c , gleich werde.

Lehrsatz. Das Ganze ist grösser als jeder seiner einzelnen Theile.

Beweis. In $a + b = c$ ist c das Ganze und a, b sind die einzelnen Theile. Nun ist $a + b > a$, $a + b > b$, und

wird Gleiches statt Gleichem substituirt, $a + b = c$, so ist auch $c > a$, $c > b$, und darum auch $a < c$, $b < c$.

Lehrsatz. Wenn eine Grösse nicht grösser und nicht kleiner ist, als eine andere Grösse, so ist sie ihr gleich, und kann statt ihrer gesetzt werden.

Beweis. Wenn a nicht $> c$ und nicht $< c$ ist, so kann weder zu c eine Grösse addirt werden, damit sie gleich a werde, noch kann zu a eine Grösse addirt werden, damit sie gleich c werde. Wird daher a statt c , und c statt a gesetzt, so wird nichts in den Operationen der Addition verändert; es gehen dieselben Resultate hervor, und darum sind auch a und c einander gleich.

Lehrsatz. Gleiches zu Grösserem addirt giebt Grösseres, oder $a + b > a$; $m = m$, also $a + b + m > a + m$.

Beweis. $(a + b) + m = a + m + b$ (nach dem Axiome,) und $(a + m) + b > a + m$, (aus den Definitionen) und Gleiches statt Gleichem substituirt giebt: $(a + b) + m > a + m$; was zu beweisen war.

Lehrsatz. Gleiches zu Kleinerem addirt giebt Kleineres. Dieser Satz wird auf dieselbe Art bewiesen, wie der vorhergehende Satz.

Lehrsatz. Wenn aus einer Addition Grösseres hervorgeht, so ist Gleiches zu Grösserem addirt worden.

Beweis. Es sei das Resultat einer Addition $a > c$, so ist aus einem vorhergehenden Zusatze bekannt, dass: $c + k = a$. Die Grösse c kann selbst als Summe anderer Grössen genommen werden (nach dem Zusatze zum Axiom). Wird $c = m + n$ gesetzt, und Gleiches statt Gleichem substituirt, so folgt $a > c$; $c + k > c$; $(m + n) + k > m + n$; $(m + k) + n > m + n$. Nun ist $m + k > m$ (nach den Definitionen); und zu beiden Ausdrücken, $m + k$, und m , ist die gleiche Grösse n addirt worden: $(m + k) + n$, und $m + n$. Es ist daher Gleiches zu Grösserem addirt worden, was zu beweisen war.

Lehrsatz. Wenn als Resultat einer Addition Kleineres hervorgeht, so ist Gleiches zu Kleinerem addirt worden. — Dieser Satz wird ganz auf dieselbe Art bewiesen, wie der vorhergehende Satz.

Lehrsatz. Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

Beweis. Würde Gleiches zu Gleichem addirt nicht Gleiches geben, so müsste es Grösseres oder Kleineres geben. Würde es Grösseres geben, so wäre Gleiches zu Grösserem addirt worden, was unmöglich ist, da Gleiches zu Gleichem addirt worden ist; würde es Kleineres geben, so wäre Gleiches zu Kleinerem addirt worden, was wieder unmöglich ist. Da also Gleiches zu Gleichem addirt nicht Grösseres und nicht Kleineres geben kann, so muss es Gleiches geben (nach einem vorhergehenden Lehrsatz).

Lehrsatz. Addirte Grössen werden addirt, indem man die Klammern beliebig setzt oder weglässt. So ist $(a + b) + (m + n) = (a + b + m) + n = a + b + m + n =$ u. s. w. Der Beweis dieses Satzes ist in dem Axiome selber enthalten.

Subtraction. Die Subtraction wird aus der Addition abgeleitet und definirt. Ist nämlich $a + b = c$, und wird die Frage gestellt, wie man a allein aus $a + b = c$ finden könne, so geht aus der Beantwortung dieser Frage die Operation der Subtraction hervor.

Def. Eine Grösse b von c *subtrahiren* heisst eine neue Grösse finden, welche, wenn zu ihr b addirt wird, wieder c giebt. In Zeichen ausgedrückt ist die Definition der Subtraction folgende: $(c - b) + b = c$.

Lehrsatz. Es ist auch $(c + b) - b = c$; oder wenn eine Grösse b zu c addirt und dann wieder subtrahirt wird, so bleibt die Grösse c unverändert.

Beweis. Wäre $(b + c) - b$ grösser oder kleiner: c , so wäre (Gleiches $(b = b)$ zu Grösserem oder Kleinerem addirt). $(c + b) - b + b$: grösser oder kleiner: als $c + b$. Nun ist $(c + b) - b + b$ nichts anders, als $c + b$, da nach der Definition der

Subtraction der Ausdruck $(-b + b)$ sich aufhebt. Es wäre demnach $c + b$: grösser oder kleiner als: $c + b$. Diess ist aber unmöglich, dass $(c + b)$: grösser oder kleiner als: $c + b$ sei, da Gleiches $b = b$ zu Gleichem $c = c$ addirt, Gleiches giebt. Daraus folgt, dass $(c + b) - b = c$ sei.

Zusatz. Es ist daher $c - b + b = c + b - b$, da sie dem nämlichen dritten c gleich sind.

Lehrsatz. Gleiches von Gleichem subtrahirt bleibt Gleiches. Wird von $a = b$ die Gleichung $m = m$ subtrahirt, so folgt $a - m = b - m$.

Beweis. Wäre $a - m$: grösser oder kleiner als: $b - m$, so wäre (Gleiches $m = m$) zu Grösserem oder Kleinerem addirt: $a - m + m$: grösser oder kleiner als: $b - m + m$, und a : grösser oder kleiner als: b , was unmöglich ist, da $a = b$ vorausgesetzt worden ist.

Zusatz. Aus $a + b = c$ folgt (Gleiches von Gleichem subtrahirt): $a = c - b$. Eine unbekannte Grösse a kann also durch die Subtraction zweier bekannter Grössen ($c - b$) gefunden werden. — Und da einmal eine Grösse a die *Differenz* zweier Grössen ($c - b$) ist, so kann jede andere Grösse, als die Differenz zweier (gleichartiger) Grössen genommen werden. —

Lehrsatz. Es ist gleichgültig, in welcher Ordnung subtrahirt wird, oder $a + m - n = a - n + m$.

Beweis. Gleiches addirt giebt: $a + m = a - n + m + n = a - n + n + m = a + m$. —

Nun stellen sich folgende vier Fragen dar, die eben so viele Lehrsätze geben werden: 1) und 2) Wie werden addirte und subtrahirte Grössen subtrahirt? 3) und 4): Wie werden subtrahirte Grössen addirt und subtrahirt? Die zweite und vierte Frage stimmen mit einander überein.

Lehrsatz. 1) $(a + b) - (m + n) = x$. Die Auflösung besteht darin, dass x in Ausdrücken von a, b, m, n gefunden werde. Da Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches

giebt, so ist $a + b = x + (m + n) = x + m + n = x + n + m$. Gleiches von Gleichem subtrahirt, folgt: $a + b - m = x + n$, und $a + b - m - n = x$. Es ist daher: $(a + b) - (m + n) = a + b - m - n$. Daraus wird die Abkürzungsregel abgelesen: dass addirte Grössen im *Ganzen* subtrahirt werden, indem die Grössen *einzel*n subtrahirt; oder indem die Zeichen der Grössen der Reihe nach verändert werden.

Lehrsatz. 2) $a - (m - n) = x$, und x soll in Ausdrücken von a, m, n gegeben werden. Es ist nach dem Verfahren wie im vorhergehenden Lehrsatz: $a = x + (m - n)$, und Gleiches $n = n$ addirt: $a + n = x + (m - n) + n = x + m$; Gleiches subtrahirt: $(a + n) - m = x$, $a + n - m = x$, $a - m + n = x$. Es ist daher: $a - (m - n) = a + n - m = a - m + n$. Daraus wird die Abkürzungsregel abgelesen, dass die Grössen *im Ganzen* (die Differenzen) subtrahirt werden, indem ihre Zeichen *einzel*n geändert werden.

Lehrsatz. 3) $(a - b) + (m - n) = x$. Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt: $(a - b) = x - (m - n)$; $a - b = x - m + n = x + n - m$. Gleiches addirt giebt: $a - b + m = x + n$, und Gleiches subtrahirt giebt: $a - b + m - n = x$; also $(a - b) + (m - n) = a - b + m - n$. Daraus leitet man die Abkürzungsregel ab, dass man die Klammern weglässt (einen einzigen Ausdruck bildet), und die Grössen mit ihrem Zeichen verbindet.

Lehrsatz 4): $(a - b) - (m - n) = x$. Dieser Lehrsatz ist bereits im zweiten Lehrsatz enthalten. Das Resultat ist, dass $(a - b) - (m - n) = a - b - m + n$ sei.

Multiplication. Aus der Addition wird die Operation der Multiplication abgeleitet, indem die Addition wiederholt, und dann die Einschränkung gesetzt wird, dass nur *gleiche* Grössen addirt werden. Die Multiplication ist also eine beliebig oftmal

wiederholte Addition gleicher Grössen. Diess ihre Definition. Ihr Zeichen ist: $a + a + a + \dots a = m a$.

Zusatz. Der Factor m drückt eine ganze Zahl aus. Diese Zahl ist das *bestimmte* Zeichen für die m mal ausgeführte Operation der Addition.

Zusatz. Wird die Gleichung $m a = b$ hergestellt, worin b das Ganze ist, so ist b durch Multiplication entstanden. Da alle Grössen gleichartig sind, so wird jede Grösse, also auch a als durch Multiplication anderer Grössen entstanden gedacht werden können.

Anmerkung. Hier kann die Multiplication nur als die Addition gleicher Grössen abgeleitet und definirt werden. Später, wenn die Entwicklung der Lehrsätze dahin führt, wird die Multiplication gebrochener, irrationaler Zahlen u. s. w. und endlich die *allgemeine* Multiplication definirt, und dort wird bewiesen werden können, dass für die allgemeine Multiplication ganz dieselben Regeln gelten, wie für die Multiplication mit ganzen Zahlen.

Lehrsatz 1): Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches, (wobei vorausgesetzt wird, dass der multiplicirende Factor eine ganze Zahl ist.)

Beweis. Wenn $a = b$, so ist auch $a m = b m$. Denn $a m = a + a + a + \dots a$; $b m = b + b + b + \dots b$. Da nun Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches giebt, so ist $a + a = b + b$, $(a + a) + a = (b + b) + b$, und endlich $a + a + a + \dots a = b + b + b + \dots b = x$. Es ist daher $a m = x$, $b m = x$. Daraus folgt, dass $a m = b m$, was zu beweisen war.

Nun folgt der Lehrsatz, dass zwei oder mehrere Zahlen dasselbe Resultat geben, in welcher Ordnung sie auch multiplicirt werden mögen, ein Lehrsatz, der für ganze Zahlen auf's Leichteste aus der Addition bewiesen werden kann. Dann fol-

gen die sechs Lehrsätze der Multiplication, die aus den folgenden zwei Reihen von je drei Fragen hervorgehen: Erste Reihe: Wie werden addirte Grössen multiplicirt; wie werden subtrahirte Grössen multiplicirt; wie werden multiplicirte Grössen multiplicirt? Zweite Reihe: Wie werden multiplicirte Grössen addirt, subtrahirt, multiplicirt? Daraus combiniren sich mehrere zusammengesetzte Lehrsätze, z. B.: Wie werden multiplicirte Grössen mit multiplicirten Grössen multiplicirt u. s. w. Die Entwicklung aller dieser Lehrsätze haben keine weitere Schwierigkeit.

Es ist einleuchtend, dass in der Mathematik nur in Gleichungen bewiesen werden könne, da die Substitution von Grössen nur durch Gleichungen möglich ist. Uebersieht man diess, und sucht man anders als durch Gleichungen zu beweisen, so beraubt man sich selbst aller Hilfsmittel, die man anfangs errungen hatte, und gelangt doch niemals zu der überzeugenden Klarheit der in Gleichungen geführten Beweise. Man will z. B. beweisen, dass positive und negative Grössen mit einander multiplicirt ein negatives Produkt geben, oder dass negative mit negativen Grössen multiplicirt ein positives Produkt geben. Welcher Scharfsinn ist hier nicht versucht worden, wie man diese Sätze anders als in Gleichungen beweisen könne? Und was sind diese Ableitungen gegen die einfachen und überzeugenden Beweise durch Gleichungen?

Es sei z. B. zu beweisen, dass $(a - b) m = am - bm$ sei. (Vorausgesetzt wird der Satz, dass $(h + k) m = hm + km$ sei). Nun ist $a - b = c$, $m = m$, und Gleiches mit Gleichem multiplicirt: $(a - b) m = cm$. Aufgabe ist, dass cm in Ausdrücken von a , b , m gefunden werde. Aus $(a - b) = c$ folgt, dass $a = c + b$ und aus $am = (c + b) m$, folgt, dass $am = cm + bm$. Da nun cm gesucht wird, so muss bm subtrahirt werden, und es folgt, dass $am - bm = cm$ sei. Daraus folgt, dass $(a - b) m = am - bm$ sei. Aus diesem, in richtigen Operationen gefundenen, Resultate wird die Abkürzungsregel abgelesen, dass $(+)$ mit $(-)$ multiplicirt $(-)$

gebe. Man stellt aber diese Abkürzungsregel auf, damit man nicht jederzeit genöthigt sei, diese ausführlichen Operationen zu wiederholen. — Oder es soll bewiesen werden, dass $(a - b)(m - n) = am - bm - an + bn$ sei. Man setzt $a - b = c$; $m - n = s$; er ist daher: $(a - b)(m - n) = cs$ und cs soll in Ausdrücken von a, b, m, n gegeben werden. Nun ist auch $m = s + n$, also $(a - b) = c$ multiplicirt mit $(m = s + n) = am - bm = cs + cn$. Nun ist $cn = (a - b)n$, also $cn = an - bn$, und diess in obige Gleichung substituirt giebt: $am - bm = cs + an - bn$. Da, cs allein, gesucht wird, so folgt: $am - bm - an + bn = cs$. Daraus lies't man die Abkürzungsregel ab, dass positive mit negativen Grössen multiplicirt negative, und negative mit negativen Grössen multiplicirt positive Grössen geben.

Aus der Multiplication wird dann die Division abgeleitet. Eine Grösse a durch b dividiren heisst, eine neue Grösse suchen, die mit b multiplicirt wieder a giebt. Die Definition der Division in Zeichen ausgedrückt ist: $(a : b)b = a$. — Dann folgen die Lehrsätze, dass es gleichgültig sei, ob man zuerst dividiren und dann multipliciren, oder zuerst multipliciren und dann dividiren; dass Gleiches durch Gleiches dividirt Gleiches gebe u. s. w. Die Entwicklungen dieser Sätze, so wie aller nachfolgenden analytischen Sätze haben keine weiteren vom Axiome abhängigen Schwierigkeiten. — Und so ist der Beweis geliefert worden, dass ein Axiom hinreiche, eine ganze Wissenschaft zu begründen und zu beherrschen.

Die Axiome der Wissenschaften sind also keineswegs so unbedeutend, wie die sogenannten sich von selbst verstehenden Wahrheiten, bei denen nichts gedacht und nichts verstanden wird. Die Axiome müssen erfüllt sein, ja es muss in ihnen die ganze Wissenschaft wesentlich mitgedacht werden können. Im Axiome wird zunächst erkannt, welche Gegenstände nicht zu der Wissenschaft dieses Axioms gehören, und wie sich das

Gebiet einer Wissenschaft gegen andere abgrenze; und dann wird erkannt, welches der positive Inhalt dieses Gebiets sei, d. h. von welcher Art die Erkenntnisse sein werden, die man in dieser Wissenschaft mit Recht erwarten und verlangen könne.

In einer vollkommen geordneten und vollendeten Wissenschaft ist das Axiom der einzige Punkt, von welchem aus der Gegenstand selbst angegriffen und aufgenommen werden kann; die ferneren aus dem Axiome abgeleiteten Definitionen, Lehrsätze und Beweise, die den Gegenstand elementarisiren und erläutern, werden in Symbolen ausgeführt, und nicht mehr aus dem Gegenstande, sondern unabhängig vom Gegenstande einzig aus der Vernunft erkannt und bewiesen. — Eine Wissenschaft, in welcher bald Apriorisches in Zeichen und Symbolen, bald Empirisches aus dem Gegenstande selbst aufgenommen würde, könnte erst im Werden begriffen und unvollendet sein; ist aber eine Wissenschaft vollendet, so müssen alle Definitionen und Beweise aus dem Axiome allein geführt werden, ja es kann in ihnen wesentlich keine andere Wahrheit als die Wahrheit des Axioms sein; es wird in ihnen nur entwickelt, was im Axiome zwar vorgebildet, aber noch unentwickelt und verborgen war.

die Gegenstände, und auf die in ihnen enthaltenen Bedingungen ihres Erkannthwerdens. In der Mathematik besteht der Unterschied, dass die Axiome für die theoretische, die Postulate für die praktische Erkenntnis gelten. So wird z. B. das Postulat aufgestellt, dass man zwischen je zwei Punkten eine gerade Linie ziehen und beliebig verlängern könne. Trennt man aber das Praktische vom Theoretischen, so bleiben nur die Axiome übrig; es sei denn, dass man die Forderung stelle, dass jeder der Wissenschaft erlangen will, denken könne. Diese Voraussetzung, dass im Subjekte kein Hindernis des Denkens liegt, ist allerdings die allgemeine Voraussetzung aller Wissenschaften. Was soll das Axiom einer Wissenschaft enthalten? Offenbar nichts anders, als die bestimmten Verbindungen von Begriffen, nach welchen in diesen Wissenschaften gedacht und

Neunte Untersuchung.

Fortsetzung der vorhergehenden Untersuchung.

Wir kommen zu den Axiomen der übrigen Vernunft-Wissenschaften. Es werden öfter Axiome und Postulate unterschieden, namentlich in der Mathematik; doch sind beide der Wortbedeutung nach ziemlich dasselbe. Axiom ist eine Forderung, die ich an mich selbst mache, eine Würdigung, dass etwas so und nicht anders genommen werde; Postulat ist ebenfalls eine Forderung, die ich mache, doch mehr in Bezug auf die Gegenstände, und auf die in ihnen enthaltenen Bedingungen ihres Erkenntwerdens. In der Mathematik besteht der Unterschied, dass die Axiome für die theoretische, die Postulate für die praktische Erkenntniss gelten. So wird z. B. das Postulat aufgestellt, dass man zwischen je zwei Punkten eine gerade Linie ziehen und beliebig verlängern könne. Trennt man aber das Practische vom Theoretischen, so bleiben nur die Axiome übrig; es sei denn, dass man die Forderung stelle, dass Jeder, der Wissenschaft erlangen will, denken könne. Diese Voraussetzung, dass im Subjecte kein Hinderniss des Denkens liege, ist allerdings die allgemeine Voraussetzung aller Wissenschaften.

Was soll das Axiom einer Wissenschaft enthalten? Offenbar nichts anders, als die bestimmten Verbindungen von Begriffen, nach welchen in diesen Wissenschaften gedacht und

erkannt wird. Diese Verbindungen müssen vorausgehen, dann werden sie definirt, und endlich werden sie in Lehrsätzen als Axiome ausgesprochen, wie bei den mathematischen Axiomen gezeigt worden ist.

Es kann als ein unvermuthetes Glück erscheinen, wenn sich am Anfange einer Wissenschaft ein Satz findet, der, wie das mathematische Axiom eine ganze Wissenschaft beherrscht und ordnet. Es ist aber der Anfang einer Wissenschaft, wie er sich historisch macht, von dem Anfange, wie er systematisch gebildet wird, wohl zu unterscheiden. Als zuerst Mathematik geschaffen wurde, war allerdings das Axiom noch unerkannt und verborgen. Es war aber doch in allen Lehrsätzen stillschweigend vorausgesetzt, es war die sie alle tragende und begründende Kraft der Wahrheit. Später, als die Mathematik einen ersten Grad der Ausbildung gewonnen hatte, gelang es den Mathematikern, die vorhandenen Elementar-Erkenntnisse zu ordnen, und indem sie dieselben alle unter sich verglichen, mussten sie finden, dass die Beweise aller Sätze auf dem allgemeinen Satze beruhen, dass Alles, was demselben gleich sei, auch unter sich selbst gleich sei. Des andern Satzes, dass es gleichgültig sei, in welcher Ordnung die Grössen addirt oder subtrahirt werden, gedachten sie gar nicht, da ihren Untersuchungen vorzugsweise geometrische Sätze zu Grundlagen lagen, bei denen schon der blosser Augenschein zeigte, dass dasselbe Ganze hervorgehe, in welcher Ordnung auch die Linien, oder die Flächen, oder die Körper mit einander verbunden werden mögen. Sie nahmen diess für die unmittelbare Gewissheit hin. Allein man muss diess doch wissen und aussprechen, was als unmittelbare Gewissheit angenommen wird. Es ist besser, es bewusst zu thun, als unbewusst. — Zwar hat *Euklid* das Axiom: Was demselben gleich ist, ist auch unter sich selbst gleich, nicht als einziges Axiom ausgezeichnet, sondern er hat es mit andern Axiomen verbunden; aber er hat es doch an die Spitze aller Axiome gestellt, gleichsam

als sollte einst bei grösserer Ausbildung der Wissenschaft Alles, was weiter Axiom genannt wurde, aus jenem ersten hergeleitet und bewiesen werden; was denn auch auf's Leichteste ausgeführt werden kann.

Die Axiome der bereits bestehenden Wissenschaften werden daher gefunden, wenn die Aufmerksamkeit auf dasjenige gerichtet wird, was in den Beweisen aller Sätze offen oder stillschweigend vorausgesetzt wird. Denn die Axiome sind die in allen Sätzen und Beweisen enthaltenen innerlichen Wahrheiten. — Es ist nicht denkbar, dass das Axiom einer Wissenschaft aufgestellt werde, ohne dass bereits Erfahrungen in dieser Wissenschaft vorhanden seien. Man beruft sich bei solchen Erfahrungen nicht auf das Axiom, sondern auf Vernunft, auf den Augenschein, auf natürliche Wahrheit u. s. w. Ist dieser Zustand einmal eingetreten, dann ist es Zeit, dass man von der allgemeinen und unbestimmten Berufung auf Vernunft zu der Bestimmtheit des Denkens übergehe, und das in allem Denken Vorausgesetzte ausdrücklich hervorhebe und als Axiom auszeichne. So gab es vor der Cultur des Getreides und des Weines wildes Getreide und wildwachsende Reben, die ihr Bestehen und Gedeihen durch die nämlichen Kräfte hatten, durch welche sie auch im Cultur-Zustande Leben und Gedeihen haben. Wie die Menschen den natürlichen Weinstock und Oelbaum genommen und sie gepflanzt und veredelt haben, ebenso nehmen auch diejenigen, welche die Wissenschaften pflegen, die Wahrheiten aus der natürlichen Erkenntniss, und diese Wahrheiten werden durch die Pflege der Wissenschaften nicht etwa wesentlich andere Wahrheiten, als sie sind, sondern sie werden nur veredelt, weil sie einfacher gemacht, und alles Ueberflüssigen und Unnützen entkleidet werden, damit eine Uebersicht vieler Erkenntnisse, eine Wissenschaft ohne grossen Aufwand und auf's Leichteste erreicht werden könne. Die systematischen Wahrheiten sind die nämlichen Wahrheiten, wie die natürlichen, sie unterscheiden sich nur von ihnen, wie sich

die edlen Oelbäume von den wilden Oelbäumen unterscheiden, nämlich durch ihre Früchte.

Uebrigens kann es nicht verwerflich sein, wenn in einer noch nicht weit vorgeschrittenen Wissenschaft *mehrere* Axiome zugleich aufgestellt werden. Es ist diess schon anerkennungs-würdig, wenn einmal von den sogenannten unmittelbaren That-sachen abgegangen, wenn eingesehen wird, dass an ihre Stelle Axiome und durch die Axiome Erkenntnisse gesetzt werden müssen. Auch ist die Aufstellung von Axiomen ein Zeichen, dass bereits wirklich an die Beweise gedacht worden sei. Ehe man sie also als Axiome auszeichnen konnte, musste man sie in Beweisen versucht und durchgeführt haben. Bei dem ferneren Voranschreiten der Wissenschaften werden immer mehrere Axiome in weniger, und endlich in ein einziges und wahres Axiom vereinigt werden.

Hier stellen sich nun einige Schwierigkeiten in den Weg. Wenn man nämlich aus den vorhandenen Erkenntnissen das Axiom finden zu können glaubt, so setzt man schon wahre Erkenntnisse als vorhanden voraus. Allein wie viele erste Gedanken und Erkenntnisse sind wirklich falsch, und erhalten erst ihre Berichtigung durch das Axiom selbst? Man kann keinen Gedanken ohne Prüfung als wahr voraussetzen, und diese Prüfung wird erst durch das Axiom möglich gemacht. Daher kommt eben das Schwanken der Philosophie in ihren Entwicklungen. Man macht also einen Cirkel in der Voraussetzung. Und man kann nicht sagen, dass sich das Bedürfniss von dem Ueberflusse des Systems unterscheide, und dass es das Bedürfniss selbst mit einem Cirkel nicht so genau nehme. Denn es handelt sich hier nicht um eine nothdürftige Erkenntniss, sondern um den reinen Genuss der Wahrheit selber; und da kann es nicht genau genug genommen werden.

Dagegen wird erwiedert werden können: Wenn auch das Feinste und Allgemeinste nicht ausdrücklich in dem ersten Denken hervorgehoben wird, so müssen doch die Spuren des-

selben in allen menschlichen Gedanken vorhanden sein. Da nämlich Alles auf ein empirisches Denken zurückkommt, dass nämlich der Mensch selbst es sei, der denke und erkenne. so ist auch das Allgemeinste nur aus diesem empirischen Denken abzuleiten. Was gar nicht da ist, das kann allerdings nicht gefunden werden. Anders ist es, wenn die andere Seite her-
 ausgewendet wird; ob den Gedanken, die wir finden, auch Realität entspreche, z. B. den Gedanken von Gott, von Jenseits u. s. w. Also könnten wir möglicherweise zu viel finden, oder auch zu viel entbehren; es könnte etwas sein, was gar nicht in die Gedanken fiel. Diess müssten wir allerdings hinnehmen, wenn es so wäre, denn die Wirklichkeit würden wir durch keine Wissenschaft ändern oder ersetzen können. Was wir aber nicht entbehren, sondern im Bewusstsein haben, das werden wir jedenfalls durch Wissenschaft ändern, aus dunklem, schwankendem, ungewissem Wissen in klares, festes, sicheres Wissen erheben können. — Die ganze Last dieser Einwendungen trifft übrigens mehr diejenigen Wissenschaften, welche die Resultate der Vernunft-Wissenschaften für sich in Anspruch nehmen, und anwenden. Der Hauptbeweis für die Vernunft-Wissenschaften selbst liegt in ihrem Gelingen.

In den Vernunft-Wissenschaften bescheidet man sich, ein bestimmtes Vernunft-Gebiet zu ermessen, und die Gesetze der bestimmten Verbindungen dieses Gebiets aufzustellen, von einander abzuleiten und zu beweisen. Man weiss Alles, was man hier wissen soll, wenn man dieses weiss und ausführen kann. Die Vernunft-Wissenschaften sind die sich bescheidenden; sie wollen alle Aufgaben der ihnen zustehenden Untersuchungen ordnen und auf die schärfsten Ausdrücke bringen, zum Besten der Erkenntniss überhaupt, und dann insbesondere zum Besten derjenigen Wissenschaften, denen sie dienen, und deren Wesen in der Innowerdung und Erkenntniss der bereits gelösten Aufgaben der Vernunft-Wissenschaften besteht. In ihnen wird sich die Vernunft ihres Umfangs und ihres Inhalts inne. Wenn

diess auch nicht das Höchste ist, so ist es doch das Wichtigste, ohne welches keine Erkenntniss möglich sein würde. Uebrigens wird nichts Unmögliches verlangt. Da wir nämlich in den Axiomen die bestimmten Verbindungen des Denkens aufstellen sollen, alles wirkliche Denken aber ein bestimmtes Denken ist, so wird in allem Denken eine bestimmte Verbindung der Begriffe, ein Axiom, wahrnehmbar sein müssen. — Jene Einwendungen würden nur dann Gültigkeit haben, wenn in allem wahren, wenn auch anfänglichen Denken *nur durchaus Erkanntes* enthalten und ableitbar sein müsste. Es ist aber bei den Definitionen auf's Strengste bewiesen worden, dass diess keineswegs der Fall sei, dass vielmehr in allen anfänglichen Erkenntnissen Erkanntes und Unerkanntes, aber darum nicht Unbestimmtes, enthalten sein müsse. Das Erkannte und Erkennbare sind aber gerade die bestimmten Verbindungen der Begriffe, der Axiome.

Eine fernere Schwierigkeit ist, dass man, wenn aus den schon vorhandenen Erkenntnissen die Axiome gefunden werden sollen, ganz und gar keine Bürgschaft habe, dass auf diese Art alle möglichen Erkenntnisse gewonnen werden. Und gerade die Sicherheit, dass man den ganzen Umfang der menschlichen Erkenntnisse inne werde, ist die Hauptsache bei allem Denken. Es wäre ja möglich, dass die wichtigsten Erkenntnisse gerade nicht auf der Oberfläche des gewöhnlichen Denkens lägen; wie sollte man also von dieser Oberfläche aus zu ihnen und zu ihren Axiomen gelangen können?

Darauf lässt sich nun im Allgemeinen antworten, dass allerdings nicht mehr Axiome gefunden werden können, als wirklich vorhanden sind. Wenn so viele Axiome gefunden sind, dass durch sie alles wirkliche Denken erklärt und begriffen wird, so sind auch nothwendigerweise *alle* Axiome selbst gefunden. Es decken sich die Aufgaben und Auflösungen; das Eine fordert das Andere, und wenn das Eine fehlt, so zeigt sich diess im Andern; sie erfüllen sich gegenseitig. Auf diese

Art, wenn alle Probleme gelöst sind, kann man sicher sein, dass man alle Axiome gefunden habe.

Doch lässt sich auch eine bestimmte und entscheidende Antwort geben. Wir gehen vom Denken, als der Verbindung von Begriffen aus. Es soll Unerkanntes und Erkanntes mit Hilfe eines dritten Erkannten verbunden werden. Es sind also in jeder Erkenntniss *drei* Begriffe enthalten, zwei erkannte und ein unerkannter Begriff. Alles bestimmte Denken ist eine bestimmte Verbindung dieser drei Begriffe. Es kann aus der Verbindung gleichartiger Begriffe wieder ein gleichartiger Begriff hervorgehen, wie in den mathematischen Grössen, oder es kann aus der Verbindung ungleichartiger Begriffe ein neuer Begriff hervorgehen, der mit einem der verbundenen Begriffe gleichartig und mit dem andern ungleichartig ist, und es kann endlich aus der Verbindung ungleichartiger Begriffe ein neuer Begriff hervorgehen, der weder mit dem einen noch mit dem andern gleichartig ist. Bezeichnet man gleichartig durch *g*, ungleichartig durch *v*, so sind folgende vier Verbindungen möglich: *ggg*, *ggv*, *gvv*, *vvv*. Die zwei mittleren Verbindungen: *ggv*, *gvv* sind zusammengehörige Verbindungen, weil sie zwei übereinstimmende Begriffe (*gg*, *vv*), und einen nicht übereinstimmenden (*v*, *g*) enthalten. Sie werden daher nur ein einziges Vernunft-Gebiet, und ein einziges Axiom bilden, und alle Gegenstände dieses Gebiets werden mit einer unvermeidlichen, wesentlichen, nicht bloss relativen, *Duplicität* behaftet sein, je nachdem sie sich zu der Verbindung *ggv* oder zu der Verbindung *gvv* hinneigen. Und es ist möglich und nothwendig, dass sie sich zu jeder dieser Verbindungen hinneigen können. Der dritte Begriff wird mit dem ersten oder mit dem zweiten gleichartig oder ungleichartig sein können. Nennen wir diess Gebiet des Beispiels halber das *Naturgebiet*, und die ungleichartigen Begriffe *physikalisch* und *organisch*, so wird der dritte Begriff entweder physikalisch oder organisch sein können, und der Aufgang des einen wird der Untergang des andern, und der

Untergang des einen der Aufgang des andern sein müssen. Diese Duplicität müssen dann die Naturdinge, wenn sie nach diesem Schema erkannt werden können, in sich selber haben, ohne alle Rücksicht und Beziehung auf Anderes.

Wenn wir nun fortfahren und aussprechen, dass die erste Verbindung ggg das Schema des mathematischen Axioms sei, so haben wir diesem Schema bereits einen bestimmten Inhalt gegeben; wir haben erkannt, was in diesem Axiome ganz bestimmt gedacht werde. Sagen wir aber ferner, dass in gvg und gvv das Schema der Naturdinge und in vvv das Schema der geistigen Welt gegeben sei, so wird in ihnen allerdings nichts Bestimmtes erklärt, bis ihnen nicht ein bestimmter Inhalt und Ausdruck verliehen wird. Es würde aber weit über die Grenzen dieser Untersuchungen, mitten in die Metaphysik hineinführen, wenn diess auch nur entfernt versucht werden wollte. Es ist diess auch mehr der Weg, die Axiome zu prüfen, als zu finden. Jedenfalls ist es nicht nöthig, dass die Axiome von Wissenschaften, von denen kaum noch die ersten schwachen Anfänge vorhanden sind, aufgestellt und bewiesen werden. Was hier erreicht werden sollte, ist, dass eingesehen werde, dass es nur eine begrenzte und bestimmte Anzahl möglicher Verbindungen von zwei erkannten und einem unerkannten Begriffe, also auch nur eine bestimmte Anzahl von Axiomen geben könne. Und diess ist auf's Vollständigste erreicht worden.

Die Schwierigkeiten in Bezug auf die Axiome können daher auf's Leichteste und Bestimmteste gelöst werden. Es giebt zwei Wege, die Axiome zu finden; einen Weg des axiomatischen oder apriorischen Erkennens, und einen Weg der Metaphysik und der Erfahrung. Worin der erstere Weg bestehe, wie er betreten werde, und was man in ihm finde, ist bereits hinlänglich erläutert worden. Der zweite Weg, der Weg der Erfahrung, besteht darin, dass man die bestimmten Verbindungen kennen lernt, in denen all unser Denken vollzogen wird. Diese bestimmten Verbindungen sind eben so viele Axiome bestimmter

und verschiedener Wissenschaften, sie sind der Wirklichkeit entnommen, und sind selber Thatsachen und nicht mehr blosse Axiome. —

Ist die Aufnahme aller Gegenstände in die menschliche Erkenntniss vollendet, dann werden allerdings schon in diesem ersten Stadium der Wissenschaft die Axiome naturgemäss und mit ihrem bestimmten Inhalte gefunden und erkannt. Von ihnen aus wird dann das zweite Stadium der axiomatischen Denk-Operationen, d. h. der bestimmten Vernunft-Wissenschaften auf's Leichteste begonnen werden können. Ist aber die Aufnahme aller Gegenstände in die Erkenntniss noch nicht vollendet, ja noch nicht einmal recht begonnen (denn das mathematische Axiom ist nicht durch die Metaphysik, sondern durch die Mathematik selber aufgestellt worden), dann bleibt den Vernunft-Wissenschaften allerdings kein anderer Weg übrig, als der *axiomatische* Weg, wie ihn die Mathematik eingeschlagen hat. Die Mathematik sagt nämlich bei der Aufstellung ihres Axioms: Wenn diese bestimmte Verbindung des Denkens (durch Addition) stattfindet, so findet diese bestimmte Wissenschaft statt; diese bestimmte Verbindung giebt dieses Resultat, und diess als Lehrsatz aufgestellt, giebt den Ausdruck des Axioms. — Wird es aber keine leere Wissenschaft sein, die auf solche Art gefunden wird? Allgemein möglich ist es allerdings; aber sie wird keine gegliederte Wissenschaft sein können; was gar nicht mit der Wirklichkeit im Zusammenhange steht, das kann sich nicht aufbauen und erhalten. Das bestimmte Denken muss, wie die wildwachsende Erkenntniss, weil durch die Wirklichkeit angeregt und hervorgerufen, irgend einen Zusammenhang mit dieser selbst haben; und von diesem Punkte aus übernimmt jede bestimmte Vernunft-Wissenschaft die Aufgabe der Metaphysik für ihr bestimmtes Gebiet, und sucht sie zu lösen, so weit es ihr möglich ist. Sie kann anfangs vielleicht nur sehr entfernte Theile dieses Gebiets treffen, sie wird aber dennoch ein bestimmtes Denken in diesen entfernten Theilen ihres Gebietes haben. So

hat man anfangs in der Mathematik auch nur die Geometrie getroffen, und nicht die Analysis; diess schadet nichts; denn in der weitem Entwicklung wird eingesehen und erkannt, dass das Beweisende in ihnen nicht das Geometrische, sondern das Analytische sei. Diess Beweisende wird anfangs in mehreren besonderen Axiomen ausgesprochen; diese Axiome werden dann verglichen und auf wenigere zurückgebracht, und endlich in einen allgemeinen Ausdruck des Axioms vereinigt. Der Anfang beginnt also immer mit der Untersuchung des wirklichen Denkens. In der Metaphysik geschieht diess in der Absicht, dass das wirkliche Denken untersucht und erkannt werde; in den Vernunft-Wissenschaften geschieht es aber in der Absicht, dass etwas gefunden werde, was den Forderungen der Wissenschaften genügen könne. So ist es auch bei den Natur-Wissenschaften. Sie verfahren schon längst nach besonders gültigen Axiomen. Es ist nur der Metaphysik noch unbekannt geblieben, was in den Natur-Wissenschaften ganz und gar bekannt ist. Endlich aber werden sie auch ihr allgemeines und wahres Axiom finden.

Uebrigens hat es eine sehr vorzügliche Seite, wenn die Vernunft-Wissenschaften nicht metaphysisch, sondern axiomatisch begonnen werden. Sie werden dadurch innerhalb ihres eigenen Gebiets ganz freie und unabhängige, wahrhaft apriorische Wissenschaften. Wenn z. B. die Mathematik die Gesetze der Bewegung vollkommen erklärt und bewiesen hat, so ist ihr Resultat: Wenn Bewegung ist, so wird sie nach diesen Gesetzen erkannt werden müssen. Nun kommt eine Wissenschaft z. B. die Astronomie, welche die Bewegung der himmlischen Körper erkennen lehrt. Dass sich die himmlischen Körper nun so bewegen, wie die Mathematik gelehrt hat, diess zu beweisen, ist Aufgabe der Astronomie und nicht der Mathematik. Aber diess ist das Geringste; die Astronomie, welche die Gesetze der Bewegung anwenden will, ist glücklich, dass sie in der Mathematik etwas vorfindet, was sie anwenden könne. So

werden die Schwierigkeiten getrennt; das Geringere, aber Lästigere, die Aufnahme und Uebersetzung der erfahrbaren Gegenstände, wird der Anwendung überlassen, und die Vernunft-Wissenschaften bleiben das Freieste in ihrem Gebiete, ganz in ihren eigenen Gesetzen gegründet und getragen.

Obgleich also jede Vernunft-Wissenschaft metaphysisch beginnen könnte, und geschichtlich auch so beginnt, so soll sie doch als System nur *axiomatisch* beginnen. Wird metaphysisch begonnen, so muss auf Alles Rücksicht genommen werden, auch auf die mitbestehenden übrigen Vernunft-Wissenschaften, und diess kann die Reinheit der Erkenntniss trüben; wird aber axiomatisch begonnen, so wird die Wissenschaft entwickelt, als wäre sie die einzige und allein gültige; ihre Wahrheiten werden erkannt, wie sie sein würden, wenn sie allein bestünden, und nichts ausser und neben ihnen, durch das sie eingeschränkt, und möglicherweise auch umgestimmt oder verändert werden könnten. So wird das Einzelne erkannt, wie es für sich sein würde, wenn es das Einzelne wäre; und ist erst alles Einzelne erkannt, dann wird es sich in der Verbindung mit dem Uebrigen zu einem Ganzen einreihen und ordnen. Dann erst wird wahrhaft erkannt werden können, was dem Einzelnen als solchem, und was der Ordnung und der Verbindung als solcher zukomme; und indem sich alles Einzelne im Ganzen geltend macht, werden alle Punkte hervorgehoben, die erkannt werden sollen, und die nur zu leicht übersehen werden, wenn sich nicht zuvor das Einzelne als solches geltend gemacht und Erkenntniss gefordert hat. Dass man aber einsehe, was in Allem wahrhaft zu erkennen sei, ist das Wesentlichste in jeder Wissenschaft. Die Wissenschaft wird durch einen solchen axiomatischen Anfang allerdings des Gefühls beraubt, als würde sie vom Stoffe getragen; aber die Wissenschaft soll auch nichts Träges sein. Andererseits wird dadurch eine solche Schärfe und Kraft des Bewusstseins in allen auch noch so entfernten Beweisen hergestellt, dass man in Allem, im Einfachen wie im

Zusammengesetzten den letzten Grund aller Wahrheit, der der denkende Geist selber ist, wieder zu erkennen und festzuhalten im Stande ist. Auch in Bezug auf die ganze Erkenntniss hat es sein Gutes, wenn die Vernunft-Wissenschaften axiomatisch begonnen, wenn die Axiome a priori, d. h. aus dem Denken selbst hergestellt werden. Dadurch werden die Vernunft-Wissenschaften in den Stand gesetzt, dass sie die vorausgehenden Wissenschaften der Aufnahme aller Gegenstände in die Erkenntniss, der Wahrnehmung und Erfahrung, unterstützen können. Nicht was das Erste, sondern was das Sicherste und Gegründetste ist, kann allem Andern Sicherheit und Schutz verleihen. Hat man eine grosse wissenschaftliche Erfahrung, das Gelingen einer ganzen Wissenschaft zur Unterstützung einer Wahrheit, so ist diese Hilfe viel grösser und wichtiger, als die Hilfe einer ersten, unerprobten Wahrnehmung und Erfahrung. So wird aus dem Wesen der mathematischen Wahrheiten viel sicherer, als aus den Wahrnehmungen und Erfahrungen selber eingesehen, was das wahrhaft Wahrnehmbare in allen mathematischen Gegenständen sei. Eine jede Wissenschaft soll jede andere unterstützen und erleichtern; es giebt ohnehin genug natürliche Schwierigkeiten, und es ist unstreitig besser, wenn sie wissenschaftlich erleichtert, als wenn sie unwissenschaftlich und künstlich erschwert werden. —

Noch ist die Frage zu beantworten, welches die Axiome der *allgemeinen* Vernunft-Wissenschaften sein werden. — Die Logik als die allgemeine formelle Vernunft-Wissenschaft wird keinen andern Ausdruck ihres Axioms haben können, als der schon in der allgemeinen Voraussetzung aller durch formelles Denken zu erreichenden Gewissheit gegeben ist. Diese Voraussetzung ist aber das Princip der *Substitution*, dass nämlich, unbeschadet der Wahrheit, das Gefundene für das Gesuchte gesetzt, und in allen Beweisen gebraucht werden könne. Da jedoch in naturgemässer Ordnung die Metaphysik der Logik vorausgeht, indem sie sich mit den wirklichen Ursachen des Denkens, mit den

wirklichen Bedingungen beschäftigt, unter denen allein das Denken und die Erkenntniss der Wahrheit möglich ist, so wird das Axiom der Metaphysik auch in der Logik als Lehrsatz enthalten sein müssen. Die allgemeine Voraussetzung der Metaphysik ist aber, dass, wenn Denken überhaupt möglich sein soll, diess nicht mit sich selber im Widerspruche sein könne.

Es ist die Aufgabe der allgemeinen Vernunft-Wissenschaften, dass sie die unbestimmte, allgemeine Verbindung der Begriffe, bloss der Natur des denkenden Geistes gemäss, dass keine Unvernunft statfinde, ohne Rücksicht auf die bestimmten Verbindungen des bestimmten Denkens, gleichsam bloss als Probleme feststellen. Es wird daher in ihnen auch nur eine einzige, allgemeine, nicht weiter gegliederte Operation gefunden werden können. Diess wird in einem bestimmten Lehrsatze als Axiom ausgesprochen: dass es unmöglich sei, dass die nämlichen Begriffe überhaupt in *der* Art verbunden und wieder getrennt werden können, dass dasselbe Ganze und dieselbe Wahrheit hervorgehe, es möge nun das Eine, oder das Andere geschehen. Die Verbindungen und Trennungen der Begriffe werden allgemein durch *Bejahungen* und *Verneinungen* ausgedrückt, und das Axiom, bestimmter ausgesprochen, wird sein: dass die Verbindung derselben Begriffe nicht bejaht und wieder verneint werden könne. Denn wäre diess der Fall, so würde keine Wissenschaft zu Stande kommen können. Wissenschaft soll aber zu Stande kommen; diess ist die Voraussetzung.

Dieses Axiom ist also keineswegs eine unmittelbare Wahrheit, denn es wird nur gefunden, wenn auf die Grundbedingungen aller Wissenschaft Rücksicht genommen wird, und es wird in ihm nicht Nichts gedacht, sondern es wird eine sehr bestimmte und folgenreiche Einsicht in das Wesen der Dinge und in das Wesen des erkennenden Geistes selbst gewonnen.

Mit der Voraussetzung, dass Erkenntniss überhaupt möglich sei, ist auch die Annahme verbunden, dass wir im Stande sein müssen, die Wahrheit einer Verbindung von Begriffen einzu-

sehen, und entscheiden zu können, ob eine bestimmte Verbindung von Begriffen richtig sei, oder nicht. Nun wäre es allerdings sehr erwünscht, wenn wir diess unmittelbar einsehen und entscheiden könnten. Allein dazu fehlen am Anfange alle Mittel. Diese Voraussetzung kann daher nicht anders verstanden werden, als dass wir im Stande seien, die Wahrheit aus ihrem Gegentheile zu erproben, und dass es uns möglich sei, zwei Sätze (Verbindungen von Begriffen) so herzustellen, dass wir aus der Wahrheit des einen die Unwahrheit des andern einsehen können. Eine einfache Ueberlegung zeigt auch, dass dieses so sein müsse. Denn da man anfangs nur die allgemeinen Verbindungen der Begriffe, nicht bestimmte Begriffe in bestimmten Verbindungen hat, so können auch nicht aus den Begriffen als solchen, noch aus ihren Verbindungen als solchen die Kriterien ihrer Wahrheit entnommen werden. Es bleibt also nichts anders übrig, als dass die Wahrheit durch ihr Gegentheil erprobt werde.

In so weiten, allgemeinen Sphären ist die Verbindung aller Begriffe möglich, und es kann einer so allgemeinen Verbindung nur wieder eine eben so allgemein mögliche Trennung der Begriffe entgegengesetzt werden. Beide werden sich gegenseitig Kriterien der Wahrheit sein müssen. Ist die Bejahung wahr, so ist die Verneinung falsch, und umgekehrt: ist die Bejahung falsch, so ist die Verneinung wahr u. s. w.

Daraus lernen wir, dass der menschliche Geist so eingerichtet sein müsse, dass er nicht die Verbindung Desselben bejahen und verneinen könne, und zwar nicht bloss nicht *zugleich*, wie Aristoteles will, sondern *niemals*, so dass es überflüssig ist, zu sagen, dass dasselbe nicht *zugleich* bejaht und verneint werden könne. Man wird niemals eine Mathematik erlangen können, wenn man heute einen Satz bejahen, und morgen, oder nach zehn Jahren verneinen wollte; diess Zwischenspiel der Zeit würde alle Wissenschaft unmöglich machen. Eine Verbindung von Begriffen, die einmal wahr ist, ist immer wahr, sie ist ewig und allgemein wahr. Wohl kann Cajus heute ein

Sünder und morgen ein Büsser sein, aber da werden nimmermehr *dieselben* Begriffe verbunden, ausser nur oberflächlich und scheinbar, denn der Cajus, der ein Sünder ist, ist in Hinsicht auf Sittlichkeit ein anderer Mensch, als der Cajus, der ein Büsser ist; wenn nicht etwa Sündigen und Busse thun dasselbe sittliche Werk genannt wird.

Das Axiom der Metaphysik setzt also voraus, dass jeder Denker besonnen sei, und dass er nicht dasselbe bejahe und verneine; dass er sich nicht widerspreche; es setzt Allgegenwart des Geistes in allem Wissen voraus, dass das einmal Erkannte immerfort durchdrungen, und dass dadurch zusammenhängende Erkenntniss gewonnen werde. Diese Voraussetzung wird verschieden ausgesprochen, bald als Princip der Identität, bald als Princip des Widerspruchs; in Wahrheit ist es aber das Axiom des Nicht-Widerspruchs. Man muss allerdings überlegen, ob man dieser Forderung gewachsen sei, so weit es an einem selbst liege. Spricht man diess Princip als *Thatsache* aus, so heisst es: Wir sind dieser Forderung gewachsen, wir mögen sein, wie wir wollen; spricht man es aber als *Axiom* aus, so heisst es: Nur wer dieser Forderung gewachsen ist (und nicht Jeder ist es im gleichen Maasse und immerfort gleich), nur Der hat die subjective Möglichkeit, Erkenntniss zu erlangen; so dass also Jeder selbst und kein Anderer für ihn Alles beitragen muss, damit er die Wissenschaft erlangen könne.

Noch bleibt übrig, den *sprachlich* richtigen Ausdruck für diess Princip festzustellen. Es wäre ja möglich, dass die Sprache, die einer ersten Erkenntniss dient, diese allgemeine Bejahung und Verneinung der Verbindungen von Begriffen nicht immer scharf genug bezeichne und unterscheide. Es könnte ja in den Ausdrücken der Sprache etwas vorausgesetzt sein, ohne dass es als Voraussetzung gewusst würde, und da ist es Aufgabe der Wissenschaft, dass sie diese Voraussetzung aufdecke, und zum Bewusstsein bringe. So ist es auch in der That, und wir werden jenes Axiom in einer sprachlich zusammengesetzten Form geben, weil die einfache Form nicht bezeichnend genug

ist. Die allgemeine Form ist: *Man kann aussprechen (denken)*, dass diese Begriffe verbunden werden können; *man kann nicht aussprechen (denken)*, dass diese Begriffe verbunden werden können. Die sprachlich einfachere, aber weniger bezeichnende Form ist: Diese Begriffe können verbunden werden; diese Begriffe können nicht verbunden werden. Es ist jedoch zu erinnern, dass sich die Bejahung und Verneinung nur auf die Verbindungen der Begriffe, nicht aber auf die Begriffe selbst beziehen. In dieser Hinsicht ist die ausführlichere Form viel bezeichnender und sicherer. Es ist von Wichtigkeit, dass diess herausgehoben werde. Wenn Erkenntniss erlangt werden soll, so muss etwas gewagt und unternommen werden; der Denkende muss inne werden und erkennen, dass er selbst es sei, der die Verbindungen setze, oder nicht setze, bejahe, oder verneine.

Die Bezeichnungen der Sprache sind nicht immer so genau und treffend, dass alle Missverständnisse ausgeschlossen würden. Aber die Wissenschaft soll sie ausschliessen. So sind z. B. die beiden Sätze: Die Sanftmuth ist weiss; die Sanftmuth ist nicht weiss, — sprachlich contradictorische Sätze, und einer von beiden soll wahr sein. Es ist aber keiner von beiden wahr, wenn unter „Nicht weiss sein“ Farbe überhaupt, nur nicht gerade die weisse Farbe verstanden wird, was die Sprache allerdings so versteht.

Bringt man aber die beiden Sätze auf den rechten Ausdruck: Man kann aussprechen (denken), dass die Sanftmuth weiss sei; man kann nicht aussprechen (denken), dass die Sanftmuth weiss sei; so ist einer dieser beiden Sätze nothwendig wahr, und der andere nothwendig falsch.

Dass aus einer solchen Verwechslung grosse und für die ganze Wissenschaft folgenreiche Irrthümer hervorgehen können, hat Aristoteles zuerst gezeigt und ausgeführt ⁴⁾. Es ist aber über-

⁴⁾ Analytica priora. I. Cap. 31.

sehen worden. Die Folgen deutet er in den Worten an: *Πρῶτον δ' αὐτὸ τοῦτο ἐλελήθει τοὺς χρωμένους αὐτῇ πάντα, καὶ πείθειν ἐπεχείρουν ὡς ὄντος δυνατοῦ περὶ οὐσίας ἀποδείξιν γίνεσθαι καὶ τοῦ τί ἐστίν.* (Primum autem hoc ipsum latuit omnes ea utentes, conatique sunt persuadere demonstrationem de substantia fieri posse, et quid sit, quod res quaequam sit.)

In dem angeführten Beispiele contradictorisch scheinender Sätze: *die Sanftmuth ist weiss, die Sanftmuth ist nicht weiss*, hat man den Zwischenbegriff der Farbe. Man hat erst zu untersuchen, ob die Sanftmuth farbig sei, oder nicht. Wenn aber die Zwischenbegriffe unbekannt sind, oder fehlen (wie Aristoteles behauptet, dass sie für das *Sein selbst* fehlen), dann ist alle Berufung auf die Contradiction vergeblich. Die Sache trifft eben ganz und gar nicht zu; weder das Eine, noch das Andere ist wahr. Diese Bemerkung des Aristoteles, der man übrigens in Bezug auf das Sein nicht schon beipflichtet, indem man sie im Allgemeinen anerkennt, ist von höchster Wichtigkeit. Die Untersuchung über das Sein selbst hat die Metaphysik zu führen, da sie die Aufnahme aller Dinge, ihre Uebersetzung in die Wissenschaft zur Aufgabe hat; dort kann die Sache allein entschieden werden, ob es Mittelbegriffe für das Sein gebe, oder nicht. Setzt man diess aber in der Logik unbedingt voraus, ohne zu wissen, woran man sei, so werden alle Beweise schwankend und leer werden müssen. Und doch will man sich auf die logische Nothwendigkeit steifen, dass der eine Satz nothwendig wahr und der andere nothwendig falsch sei, man glaubt, dass die Wahrheit des Einen aus der Unwahrheit des Andern dargethan werden könne. Dass man aber sich auf die Logik steifen zu können glaubt, diess ist eben das Missverständniss; denn die Logik setzt das Axiom des Widerspruchs, oder vielmehr des Nicht-Widerspruchs, nicht in die Dinge, sondern in das Denken, und nur die Sprache drückt es so aus, als ob es in die Dinge selbst gesetzt werde. Wählt man aber,

Sophistereien gegenüber, die ausführlichere Form, in der das Axiom jedesmal ausgesprochen werden soll, so wird man allen Schwierigkeiten entgehen, man wird jederzeit einsehen können, was aus einem Beweise folgen, oder nicht folgen werde.

Aus der Verbindung des metaphysischen Principes des Nicht-Widerspruchs des Denkens und des logischen Principes der Substitution gehen die einzelnen Lehrsätze der Logik hervor. Z. B. es ist allgemein eine solche Erkenntniss möglich und erklärbar, dass *Verschiedenes* (Mehreres) nach *demselben* Axiome verbunden und gedacht werden könne. Für diese verschiedenen Sätze muss daher dieselbe Negation der Negation des Axioms als *gemeinschaftliche* Beweiskraft gelten und gegenüberstehen. Wie soll diess aber möglich sein? Jeder Satz hat ja nach dem Axiome des Widerspruchs nur seine eigene ihm gegenüberstehende Negation. Dieser Zusammenhang mehrerer Sätze, denen gegenüber nur die Negation des einen und selben Axioms steht (und dadurch den Zusammenhang der Wissenschaft erhält), ist nur möglich, wenn in jedem neuen Satze durch Denken etwas hinzugekommen ist, das in dem Axiome unterdrückt war, das also auch in der Negation des Axioms nicht erscheinen kann. Wenn es erscheinen würde, so würde allerdings jeder Satz seine eigene Negation gegenüber haben. Weil jedoch das hinzugekommene Neue nur in den Sätzen, nicht aber in ihren Negationen hinzukommt und gegliedert wird, so steht auch nur die eine Negation desselben Axioms allen Lehrsätzen gegenüber, und beweist sie alle.

Diess ist jedoch nicht so zu nehmen, als ob die Negationen nicht ebenso gegliedert werden könnten, wie die Sätze selbst; sondern es kann offenbar nur eine weise *Oekonomie* des Denkens sein, dass es in seinen Beweisen nicht auf unzählig viele Negationen, sondern nur auf eine einzige zurückzugehen brauche, und dadurch die Einheit und Allgemeinheit des Wissens herstelle und erhalte.

Wird dasjenige, was in den gegliederten Sätzen einer

Wissenschaft hinzukommt, der bestimmte Inhalt dieser Wissenschaft genannt, während das allgemeine Axiom nur der Vorsatz ist, den bestimmten Inhalt einer Wissenschaft durch Denken herzustellen, so wird der Vorsatz zum Denken vom Denken selbst zu unterscheiden sein. Im letzteren wird ausgeführt werden, was im ersteren blosser Vorsatz war. Der Vorsatz zu einem bestimmten Denken giebt allen Sätzen einer Wissenschaft ihre einzige, bestimmte und unabänderliche Form; das wirkliche Denken giebt allen diesen Sätzen ihren bestimmten Inhalt. Alle Sätze, welche demselben Axiome gemäss sind, haben dieselbe Form, und gehören zu einer und derselben Wissenschaft. Will man daher, was in Axiome *unterschieden* werden kann, auch wirklich *trennen*, so wird man dem Axiome die Form, dem *Postulate* den Inhalt einer Wissenschaft zuschreiben können. Sie können aber in einem und demselben Ausdrucke des Axioms *vereinigt* und dennoch *unterschieden* werden.

Es wird daher aus dem ersten allgemeinen Grundsatz des *Widerspruchs* in Verbindung mit dem logischen Grundsatz der *Substitution*, der seiner Natur nach auf den Zusammenhang mehrerer Sätze hinweist, der allgemeine, logische Lehrsatz hervorgehen: dass das Denken, indem es in vielen, verschiedenen Sätzen einer Wissenschaft einen bestimmten Inhalt gewinnt, in allen diesen Sätzen nach einer und derselben Form des Axioms verfähre, dass es sich in diesem Inhalte nicht verliere, sondern sich nach jedem Satze wieder so frei finde, wie vor allen und jeden Sätzen, und dass alle diese Sätze und Wahrheiten zu dem Geiste keine andere Beziehung haben, als die des Gewusst-werdens und der Erkenntniss überhaupt. Dieser Satz ist selbst nur der Grundsatz des Widerspruchs mit bestimmtem Inhalte, nämlich so, dass das Denken nicht nur nicht sich widerspreche, sondern auch in verschiedenen und mehreren Sätzen sich im Zusammenhange mit dem Axiome wisse und erhalte. Dieser Satz kann der *Lehrsatz* (nicht *Grundsatz*) der Identität des Denkens genannt werden.

Man kennt in der Logik noch andere Axiome, die aber theils unnütz, theils durch Missverständniss in sie eingeführt worden sind. Durch Missverständniss ist das Axiom von *Grund und Folge* in die Logik gekommen. Denn da die Logik nur die schlechterdings allgemeine Verbindung der Begriffe berücksichtigen kann, die Verbindung durch Grund und Folge, oder durch Ursache und Wirkung, eine *bestimmte* Verbindung der Begriffe ist, so gehört diess Axiom, wenn es Axiom ist, nicht der Logik, sondern einer bestimmten Vernunft-Wissenschaft an. Es hat auch noch keinen Nutzen in der Logik geleistet.

Leibniz hat es zuerst aufgestellt, aber in ganz anderer Weise. Er sagt: Wenn etwas wahrhaft erklärt werden soll, so muss ein Grund gefunden werden, *der hinreichend ist zu zeigen, warum das Erklärte vielmehr diess, als etwas Anderes sei.* Z. B. wenn das Wasser flüssig ist, so muss es einen Grund geben, aus dem man einsehen könne, warum es vielmehr flüssig, als starr, oder luftartig sei. *Leibniz* benützt diess Axiom in der *Metaphysik*, um zu zeigen, dass Alles nur durch einen intelligenten Urheber der Welt erklärt werden könne, da es in den mechanischen Gesetzen der Natur nicht liege, warum etwas vielmehr dieses, als etwas anderes sei. — Diess ist ein himmelweiter Unterschied von den logischen Gesetzen des Grundes und der Folge. Durch *Wolf* ist es wahrscheinlich in die Logik gekommen, und so haben es die Andern auch angenommen.

Unnütz ist ferner das Axiom der *Identität*, wie es die Logik giebt: Jedes Ding ist es selbst, oder A ist A , das Denken ist das Denken. (Man kann nicht sagen: das Denken ist sich selbst gleich, oder jedes Ding ist sich selbst gleich; denn die Verbindung durch Gleichheit ist die bestimmte, mathematische Verbindung, nicht mehr die allgemeine, logische Verbindung.) Aber der Satz (A ist A) ist eine Tautologie, und das Axiom der logischen Identität ist das Axiom der Tautologie, durch das man allerdings zu nichts kommen kann. In der Mathematik

beweist man am Anfange zwar auch durch Identität, da man sich nicht anders helfen kann, aber es ist ein bestimmter Inhalt in dieser Identität, und keineswegs eine Tautologie. Z. B. zwei Dreiecke sind identisch (congruent), wenn sie zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel gemeinschaftlich haben. Hier ist das Verfahren folgendes: die drei Seiten des einen Dreiecks seien a' , b' , c' , die drei Winkel A' , B' , C' ; die Seiten und Winkel des andern Dreiecks seien a'' , b'' , c'' , A'' , B'' , C'' . Und nun, obgleich nur gegeben ist, dass $a' = a''$, $b' = b''$, $C' = C''$, so kann doch bewiesen werden, dass $c' = c''$, $A' = A''$, $B' = B''$ sein; es wird nämlich die Identität, die Congruenz der Dreiecke nachgewiesen. Daraus wird eingesehen, dass je zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel für sich allein die Grösse der übrigen Stücke eines Dreiecks bestimmen müssen. Es wird Unbekanntes (A' , B' , c') auf Bekanntes (a' , b' , C') gebracht, indem die Identität nachgewiesen wird. Man sieht die Möglichkeit ein, dass das Unbekannte durch das Bekannte bestimmt werden könne, wenn auch noch nicht die trigonometrischen Formeln bekannt sind, durch welche die Winkel eines Dreiecks durch die Seiten u. s. w. wirklich bestimmt werden. Es ist eine *feine* Beweisart, und es ist nicht zu vermuthen, dass die Logik bei ihrem Princip der Identität an eine solche Möglichkeit gedacht habe. Es ist übrigens nicht Axiom, sondern ein Schema der Beweise.

Das Princip des ausgeschlossenen Dritten endlich, wenn es etwas Anderes sein will, als ein Beweis durch das (metaphysische) Axiom der Contradiction, findet seine hinlängliche Berichtigung in dem vorausgehenden Aristotelischen Ausspruche: *Πρῶτον δ' αὐτὸ τοῦτο ἐλέληθαι τοὺς χωμένους αὐτῇ πάντα* u. s. w. Was wird man wohl aus dem Satze: Alle Logik ist entweder weiss, oder nicht-weiss, beweisen können?

Zehnte Untersuchung.

Ueber die Beweise der Lehrsätze.

Die Beweise geben die relativen Wahrheiten des Zusammenhangs und der Abhängigkeit mehrerer Sätze von einem ersten wahren Satze. Es ist daher zu untersuchen, wie die Wahrheit der Sätze überhaupt erkannt werden könne. Wie werden die Sätze einer Wissenschaft so verbunden, dass ihre Verbindungen Wahrheiten geben, und wie werden diese als Wahrheiten bewiesen? Diess ist die Frage.

Es scheinen sich zwei Möglichkeiten darzustellen. Die erste Möglichkeit ist, dass die Wahrheit eines Satzes unmittelbar eingesehen werde. Die zweite Möglichkeit ist, dass die Wahrheit eines Satzes nicht unmittelbar eingesehen, sondern dass sie vielmehr erst in Verbindung mit andern wahren Sätzen erkannt werde, so zwar, dass die bereits erkannten wahren Sätze nicht wahr sein könnten, wenn nicht auch der nachfolgende neue Satz wahr wäre.

Die erste Möglichkeit, die Lehre von den unmittelbaren Wahrheiten ist hinlänglich widerlegt worden. Eine solche Lehre würde die Wissenschaft geradezu aufheben, wenn sie ernstlich gemeint wäre. Denn die Wissenschaft besteht in einem Systeme von Wahrheiten, jede unmittelbare Wahrheit entzieht sich aber dem Systeme, sie ist ein für sich bestehendes Ganzes, gleich-

sam eine kleine, ja eine sehr kleine Wissenschaft. Könnte sie aber in eine ganze, wahre, Wissenschaft eingereiht werden. so müsste ja ihre Ordnung und ihr Zusammenhang mit andern Sätzen dieser Wissenschaft nachweisbar sein, und wäre diess der Fall, so würde auf der Stelle die Nothwendigkeit eintreten, dass dieser Zusammenhang wirklich nachgewiesen, und dass der ernste Weg der Beweise versucht werde. Bei beginnender Wissenschaft können solche unmittelbare Wahrheiten als Surrogate gelten, die mit dem Wachstume der Wissenschaft nach und nach in beweisbare Wahrheiten umgeprägt werden müssen. In einer bereits vorgeschrittenen Wissenschaft sind sie gar nicht anzuerkennen. Denn alle Wissenschaften haben nur in so weit wahre Haltung und Geltung, als sie Beweise haben.

Nimmermehr wird man behaupten können, dass in einer Wissenschaft unmittelbare Wahrheiten und bewiesene Wahrheiten neben einander bestehen können; denn alle unmittelbaren Wahrheiten unterbrechen die Continuität der Wissenschaft, und wo immer sie sich finden würden, da müsste eine neue Wissenschaft begonnen werden; denn bliebe sie die nämliche Wissenschaft, so würden auch diese unmittelbaren Wahrheiten mit den vorhergehenden und nachfolgenden Sätzen in nothwendigen Zusammenhang gebracht, d. h. bewiesen werden können. Und können sie bewiesen werden, so ist ihre Unmittelbarkeit vergeblich und ohne Werth; Jeder wird sie gerne gegen die Beweise austauschen; denn genau betrachtet waren sie gar nichts Anderes, als Anweisungen an die wissenschaftlichen Beweise.

Wenn von Beweisen gehandelt wird, so werden Vernunft-Beweise verstanden, *die unterrichtend und aufklärend sind.* Beweise aus wissenschaftlicher Autorität, oder Beweise, die man annehmen soll, weil man nichts Besseres vorbringen kann, also Beweise zum Behufe der Unwissenheit, oder endlich Beweise, die auf die stillschweigende Zustimmung des Gegners rechnen, und durch Verwirrung Uebereinstimmung erzwingen wollen, müssen aus jeder ernsten Wissenschaft verbannt bleiben.

Wenn man auch einer wissenschaftlichen Autorität nicht widersprechen will, so folgt daraus noch nicht, dass eine vorgebrachte Meinung wahr, oder auch nur vernünftig sei; auf keinen Fall aber ist sie unterrichtend und fördernd, wenn keine Gründe vorgebracht werden. Und kann man auch keinen besseren Weg andeuten, so folgt daraus noch nicht, dass ein Anderer auf gutem Wege sei, und noch viel weniger wird man in der Wissenschaft gefördert, wenn man den vorgeschlagenen Weg ohne allen Grund betreten will. Und endlich, wenn Einer irrt, so folgt daraus nicht, dass ein Anderer, der ihm diesen Irrthum zeigt, und ihn in diesem Irrthume verstrickt und gefangen nimmt, die Wahrheit habe. Der Eine kann bescheiden sein, und aus Gründen verschmähen, den Andern mit gleichen Waffen zu bekämpfen. Er kann unwissend sein, unvernünftig eine bessere Wahrheit vorzubringen; er kann im Irrthume sein, und ein Anderer kann ihn diess fühlen lassen, ohne ihm dennoch eine Wahrheit geben zu können. Diess sind Streitigkeiten, nicht Beweise. Alle Beweise sollen aufklären, und unterrichten, sie sollen wirkliche Wahrheit hervorbringen, und mittheilen. Verfahrungsweisen, die ein anderes Ziel haben, als dieses, müssen durchaus verworfen werden. Jeder Beweis ist eine Lehre, und jede Lehre soll in Beweisen mitgetheilt werden.

Bei den Beweisen ist man anfangs auf nichts Anderes, als auf die reine Widerspruchslosigkeit des Denkens angewiesen. Bejahung und Verneinung schlechthin stehen im Widerspruche zu einander, und beweisen sich gegenseitig. In den Wissenschaften soll man aber durch Beweise nicht von einer Wahrheit zu einem Widerspruche, sondern von einer Wahrheit zu einer andern Wahrheit fortschreiten. Da aber jeder Satz anfangs nur darin fruchtbar ist, dass er seinen Widerspruch ausschliesst, so wird man von ihm aus nicht zu einem andern wahren Satze fortschreiten, man wird nur zum Widerspruche mit dem ersten Satze kommen können. Damit ist der Wissenschaft nicht gedient, denn man sollte nicht zum

Widerspruche, sondern zu einem andern wahren Satze und zu vielen wahren Sätzen gelangen. Wie wird dieses möglich sein, wenn man einzig und allein an das Princip der Widerspruchslosigkeit angewiesen ist?

Hier scheint sich die Auskunft darzubieten, dass ein Widerspruch für mehrere Sätze zugleich gelte, in der Art, dass, wenn das Axiom gefunden, und der Satz seines Widerspruchs gebildet ist, alle Sätze aufgestellt werden können, für welche dieser Widerspruch in gleicher Weise Widerspruch ist. Wird nun der Widerspruch durch das Axiom ausgeschlossen, so beweist er nicht bloss das Axiom, sondern alle Sätze, für die er Widerspruch ist. Alle diese Sätze müssen daher mit dem Axiome in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, und eine gemeinschaftliche Wissenschaft bilden.

Wenn aber ein Satz, der mit einem ersten Satze im Widerspruche steht, mehrere Sätze beweisen soll, dadurch dass er auch mit diesen im Widerspruche stehe, so muss doch erst eine Operation bekannt sein, durch welche dieser Widerspruch auf mehrere Sätze übertragen wird, die dann durch den Widerspruch des Widerspruchs als wahre Sätze einer und derselben Wissenschaft erkannt werden. Diese Uebertragung der Wahrheit von einem Satze auf mehrere Sätze geht nicht aus dem Axiome des *Widerspruchs*, sondern aus dem Axiome der *Substitution* hervor. Diess ist aber der erste Satz der Logik, und die wahre Quelle aller Beweise aller Wissenschaften. Der Satz der Substitution besteht darin, dass das Gefundene für das Gesuchte, und umgekehrt das Gesuchte für das Gefundene gesetzt werden könne. Diess ist der Nerv aller Beweise. Die verschiedenen Beweisarten können nur bestimmte Gestaltungen dieses allgemeinen Satzes sein; sie werden alle Vorgänge der Beweise in Ausführlichkeit und Uebersichtlichkeit darstellen.

Der Grund der Beweise kann nichts anderes, als das Denken (das Beweisen) selbst sein, *nämlich dass die Verbindung als solche für die verbundenen Begriffe gesetzt,*

und umgekehrt, dass die verbundenen Begriffe für die Verbindung als solche gesetzt, dasselbe Resultat geben. Man hat in der Verbindung der Begriffe unmittelbar *Mehreres* (mehrere Begriffe), und in diesem *Mehreren* liegt zugleich der Anfang des Fortschritts von einem ersten Satze zu einem zweiten, und zu allen nachfolgenden Sätzen. Bestimmt mathematisch ausgesprochen ist daher das Schema aller Beweise: Gleiches für Gleiches substituirt giebt Gleiches. — Dieser Grundgedanke wird in den verschiedenen Beweisarten, die eben so viele Abkürzungsregeln des Verfahrens sind, ausgeführt werden. — Es wird aber nicht möglich sein, dass die Beweise einer bestimmten Vernunft-Wissenschaft ohne ein bestimmtes Axiom ausgeführt werden; denn es muss vorerst ein Axiom da sein, an das alle übrigen Sätze angeschlossen werden können. Jedes Axiom ist ein erster wissenschaftlicher Satz, dessen Wahrheit allen nachfolgenden Sätzen mitgetheilt werden soll. Ohne Axiom wird daher auch den nachfolgenden Sätzen keine Wahrheit mitgetheilt werden können.

Wir werden die verschiedenen Beweisarten in den bestimmten mathematischen Beweisen zu erläutern suchen. Die mathematischen Beweise werden in Gleichungen geführt, und diess ist eigenthümlich mathematisch; aber das Schema, die Form der Beweise, abgesehen von den Gleichungen, ist allgemeiner Natur, und wird sich in den Beweisen aller Wissenschaften finden müssen.

Was allen mathematischen Beweisen zu Grunde liegt, ist in dem bestimmten, dem Axiome gemäss ausgedrückten Satze enthalten: Gleiches statt Gleichem substituirt giebt Gleiches. Diess führt allerdings weit, es wird aber für sich allein nicht hinreichen können. Die ausführlicheren Gesetze sind: Gleiches addirt oder subtrahirt giebt Gleiches; Gleiches multiplicirt oder dividirt giebt Gleiches; Gleiches potenzirt oder radizirt, exponenzirt oder logarithmirt giebt Gleiches u. s. w.; oder allgemein: Gleiche Operationen mit Gleichungen vorgenommen geben Gleiches. Diese Sätze sind wesentlich Dasselbe, was der erste

Satz ist: Gleiches für Gleiches substituirt giebt Gleiches; aber sie sind entwickelter und reicher, weil nicht bloss die Grössen, sondern auch die Operationen aufgenommen sind. Sie sind aus den Axiomen in *anwendbare* Formeln umgeprägt worden. Allerdings muss aber vorher in der Mathematik erkannt sein, dass alle Operationen mit der ersten Operation der Addition identisch seien, denn sonst würde der Zusammenhang der Wissenschaft durch jede neue Operation unterbrochen werden. Diess ist auch erkannt und bewiesen. Es wird gezeigt, dass alle Operationen nur Abkürzungen und Verallgemeinerungen der Addition sind. Anfangs ist daher die Form der Beweise eingeschränkt, klein, umsichtig; sie wird immer freier, je mehr Operationen bewiesen werden, bis sie endlich zur vollen Freiheit hervortritt in dem Satze: Gleiche Operationen in gleichen Ausdrücken substituirt geben Gleiches.

Soll z. B. bewiesen werden, dass $x = 2$ sei, aus dem Satze: $10x + 15 = 35$; so verfährt man im Beweise auf folgende Art: Gegeben ist: $10x + 15 = 35$. (Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches), $15 = 15$ subtrahirt, bleibt: $10x = 20$. (Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches, durch $10 = 10$ dividirt), bleibt $x = 2$, was zu beweisen war.

Alle auch noch so verwickelten mathematischen Beweise lassen sich auf das Gesetz der Substitution gleicher Operationen zurückführen. Darum ist es auch so nothwendig, dass vorher alle elementaren Operationen der Mathematik gefunden werden, weil nur in diesen elementaren Operationen substituirt werden kann. — Diese Beweise werden *analytische* Beweise genannt; ihre Wahrheiten sind schon in den vorhergehenden Sätzen enthalten, und werden aus ihnen nur entwickelt und herausgestellt. Das Wesen der analytischen Beweise besteht darin, dass sie aus vorhergehenden Sätzen durch Anwendung blosser Operationen, nicht aber durch Einführung neuer Grössen oder Begriffe geführt werden. Sie sind blosser Veränderungen und Umformungen schon bestehender Wahrheiten, die dadurch in neuer

Gestalt erscheinen. Sie können auch *directe*, *deductive* Beweise, oder Beweise durch Substitution genannt werden.

Es giebt aber noch eine grosse Zahl mathematischer Sätze, die nicht durch blosse Substitution gefunden werden, deren Wahrheiten nicht in vorhergehenden Sätzen unmittelbar enthalten sind, und die doch mit den vorhergehenden Sätzen in nothwendigen Zusammenhang gebracht werden sollen. Wie können diese Sätze bewiesen werden? Wenn sie nicht durch *Substitution* bewiesen werden können, so wird wohl nichts anders übrig bleiben, als dass sie durch *Disjunction* bewiesen werden. Jedenfalls können sie den *directen* Beweisen gegenüber nur *indirecte* Beweise sein, Zurückführungen auf das Unmögliche oder Widersprechende. — Es ist zu untersuchen, ob sie auf die Form der *directen* Beweise zurückgebracht werden können, oder ob sie eine eigene Form der Beweise bilden, und zwar nicht aus Noth und Unbehilflichkeit, sondern ihrer ganzen Anlage und Natur nach.

Aristoteles sagt in dem bereits angeführten *einunddreissigsten* Kapitel der ersten Analytik, dass die Methode durch Disjunction (*διαίρεσις*), nur ein schwacher, unangemessener Weg sei, die Wahrheit zu finden. Diess gilt vollkommen von der allgemeinen Logik, wenn man in ihr denken will, ohne wahrhaft zu denken, wenn man auf das blosse Ungefähr hin, ohne alle Untersuchung, contradictorische Sätze aufstellen will, z. B. die Sanftmuth ist entweder weiss oder nicht-weiss. Diesem unbestimmten Denken soll eben begegnet werden, da noch keine *bestimmte* Verbindung der Begriffe, kein bestimmtes Axiom, und mit ihm der Ernst des Denkens hergestellt ist. Wollte Jemand die bereits angeführte Disjunction aufstellen: die Sanftmuth ist entweder weiss oder nicht weiss, und wollte er nun fortfahren; da sie gewiss nicht nicht-weiss ist, so ist sie weiss, so würde er gewiss irren. Und würde er diess einsehen, und die Schuld auf den Satz des Widerspruchs schieben, so würde er doppelt irren. Es musste ja zuvor der Mittelbegriff unter-

sucht werden, ob *Farbe* überhaupt mit Sanftmuth verbunden werden könne oder nicht. — Anders ist es aber in den bestimmten Vernunft-Wissenschaften. Hier sind die beweisenden Mittelbegriffe durch die Axiome hergestellt, z. B. in der Mathematik der Begriff der *Grösse*; von etwas Anderm als von Grössen kann in der Mathematik nicht die Rede sein, es müssen sowohl a als b als Grössen gedacht werden, wenn sie mathematisch gleich oder ungleich gesetzt werden. In der allgemeinen Logik ist diess nicht der Fall; es muss daher die Redeweise festgehalten werden: Man kann sagen, dass die Sanftmuth weiss sei; man kann nicht sagen, dass die Sanftmuth weiss sei. Und da der Satz gewiss falsch ist, dass die Sanftmuth weiss sei, so folgt mit Nothwendigkeit, dass der andere Satz wahr sei: dass man nicht sagen könne, dass die Sanftmuth weiss sei. Der Satz aber, so ausgesprochen, weist darauf hin, dass erst die Mittelbegriffe untersucht werden sollen, er führt also zur Untersuchung und nicht zum Irrthume. Und jeder Satz, der zur Untersuchung führt, ist ein wesentlicher und guter Satz einer Wissenschaft.

Aber in den Vernunft-Wissenschaften, in denen die Mittelbegriffe bereits bestimmt sind, ist es vollkommen einerlei, ob man sage: Man kann denken, dass $a = b$; man kann nicht denken, dass $a = b$; oder ob man sage: $a = b$; a nicht $= b$. Diese zwei Sätze sind contradictorisch (weil schon voraus bestimmt ist, dass a und b Grössen, und zwar gleichartige Grössen sind) und die Wahrheit des einen Satzes wird aus der Unwahrheit des andern mit Nothwendigkeit gefolgert. Darum übergeht man auch die ausführlichere Redeweise; denn was durch diese vermieden werden soll, ist bereits durch das Axiom ausgeschlossen worden.

Man bleibt in der Mathematik nicht bei dem Satze a nicht $= b$ stehen, sondern man geht sogleich zu den zwei bestimmten Sätzen über: $a > b$, $a < b$, und diese Bestimmtheit der Sätze geht aus der Operation der Addition heror. Eine Grösse, die grösser ist, als eine andere Grösse, zu der ist eine

dritte Grösse addirt worden; eine Grösse, die kleiner ist, als eine andere, zu der muss erst eine dritte Grösse addirt werden, damit sie der andern gleich werde. Wird dargethan, dass diese Sätze ($a > b$, $a < b$) nicht wahr seien, so folgt daraus die Wahrheit des Satzes $a = b$ mit Nothwendigkeit.

Die Form der indirecten Beweise ist also: Es ist zu zeigen, dass $a = b$; diesem Satze gegenüber sind die beiden Sätze: a grösser als b , a kleiner als b . — Nun wird der eine Satz z. B. a grösser als b mit vorhergehenden, schon gewissen Sätzen in Verbindung gebracht, indem die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication u. s. w. substituirt werden; und findet man, dass der Satz: a grösser als b , mit schon bewiesenen Sätzen im Widerspruche stehe, so folgt, dass es unmöglich sei, dass a grösser als b sei. Auf dieselbe Art wird mit dem Satze: a kleiner als b , verfahren; und findet man, dass auch die Annahme: a kleiner als b , falsch sei, so folgt mit Nothwendigkeit, dass der Satz $a = b$ wahr sei. Diess ist das allgemeine Schema der negativen oder indirecten Beweise in der Mathematik. Man kann sie auch Beweise durch Contradiction, oder contradictorische Beweise nennen.

Contradictorisch wird bewiesen, und muss bewiesen werden, wenn ein wahrhaft *neuer* Satz mit vorhergehenden Sätzen in Zusammenhang gebracht werden soll, *obgleich er nicht unmittelbar in ihnen enthalten ist*. Diess wird dadurch bewirkt, dass die Contradictionen des Satzes ($a >$ oder $<$ als b), als den vorhergehenden Sätzen widersprechend, also die Gleichheit ($a = b$) als wahr gefunden wird. Nun könnte man aber fortfahren: Wenn die Contradictionen den früheren Sätzen widersprechen, so müssen die früheren Sätze die Contradiction schon als Widerspruch enthalten. Aber wo immer die Contradiction als Widerspruch enthalten ist, da muss auch der wahre Satz als Wahrheit enthalten sein. — Aus diesem Grunde betrachtet auch *Aristoteles* den indirecten Beweis als eine schwache Form des Beweises, als einen blossen Nothbehelf; denn in allen Sätzen, in welchen man den Widerspruch eines neuen Satzes

als Widerspruch aufdecken kann, in allen diesen Sätzen muss man auch den Widerspruch des Widerspruchs d. h. die Wahrheit als Wahrheit aufdecken können; sie muss in ihnen schon als Wahrheit enthalten sein, und man wird sie finden müssen, wenn man sie auf die rechte Art sucht. Der contradictorische Beweis wäre also immer nur ein Umweg zur Wahrheit; denn die nämlichen Bande, welche den neuen Satz mit den vorhergehenden Sätzen indirect zusammenhalten, müssen ihn auch direct mit ihnen zusammenhalten. Daher wird gelehrt ⁵⁾: „Der indirecte Beweis hat geringeren wissenschaftlichen Werth als der directe. Will er etwas Positives darthun, so geht er durch eine doppelte Negation durch und kommt durch die Negation der Negation zu Stande. — Das Unmögliche ergibt sich aus dem Widerstosse (Widerspruche?) gegen bereits erkannte Sätze. Der indirecte Beweis eröffnet daher keine (keine?) Einsicht in die innern Gründe der Sache, und ist eigentlich nur da möglich, wo schon Sätze als Beweise dastehen. (Wo ist denn der directe Beweis möglich?) Die Macht liegt in der abstossenden Gewalt dieser Sätze, also auch ausserhalb der zu beweisenden Sache, ausserhalb ihres schöpferischen Vorganges. (Hängen denn die Sätze einer Wissenschaft nicht so zusammen, dass jeder innerhalb des andern liegen muss? Wie kann da der Beweis aus einem Satze für einen andern Satz etwas bloss Aeusserliches geben?) U. s. w.“

Es scheint, dass man obigem Schlusse nicht wohl widersprechen könne. Aber dann ist die Mathematik schlimm daran, und im Staube liegt ihre Palme. Sie hat ihre wichtigsten Wahrheiten in contradictorischen Beweisen gefunden, und sie muss gestehen, dass sie dieselben nicht anders beweisen könne, auch jetzt nicht, wo sie den ganzen Zusammenhang dieser Sätze einsieht. So muss sie den Vorwurf hinnehmen, dass sie nicht auf die rechte Art geforscht habe, und dass (sie über-

⁵⁾ Trendelenburg, Logische Untersuchungen, XVIII.

haupt nicht auf die rechte Art forschen könne, sie, von der man rühmen darf, dass sie in Beweisen viel mehr geforscht und gefunden habe, als alle andern Wissenschaften mit einander. Was hat denn die Logik in den „schöpferischen“ directen Beweisen gefunden? Was die Metaphysik? Man wird es zählen können, wenn es überhaupt gezählt werden kann.

Wir werden es anders nehmen müssen. Es soll aus dem Satze $m = n$ bewiesen werden, dass der Satz $a = b$ wahr sei. Nun wird $a > b$ als Widerspruch mit dem Satze $m = n$ gefunden; eben so der Satz $a < b$. — Ist nun aber der Widerspruch in dem Satze $m = n$ enthalten, so muss auch in ihm die Wahrheit $a = b$ enthalten sein. Man wird sie finden müssen, wenn man sie auf die rechte Art sucht. „Es ist also $a > b$ als Widerspruch im Satze $m = n$ enthalten.“ *Wie ist dieser Widerspruch enthalten? Die Logik sagt: er wird schon enthalten sein, er wird sich schon finden, Gott wird es schon so eingerichtet haben u. s. w.; und so sind wir an die Zukunft angewiesen. — Aber es ist nicht genug, dass man sage: er wird sich schon finden; eine wissenschaftliche Analyse muss im Stande sein, zu zeigen, wie der Widerspruch, als in einem vorhergehenden Satze enthalten, gefunden werden könne. Man wird unstreitig meinen, dass der Widerspruch nur *herausgehoben* zu werden brauche, um erkannt zu werden, und *hierin wird man unstreitig irren. Der Widerspruch ist nicht unmittelbar in $m = n$ enthalten, sondern man bringt ihn erst in diesen Satz, und die Art und Weise, wie man ihn in den Satz $m = n$ bringt, bildet eben das Wesen der contradictorischen Beweise.* In den Begriffen: Grösser, Kleiner, in den Begriffen der *Grenzen* liegt eine Weite und ein Spielraum, in welchem die Fäden geknüpft werden, die den Widerspruch mit dem Satze: $a = b$, zugleich als Widerspruch mit dem Satze: $m = n$ herausstellen. Es wird nämlich gezeigt, dass die Begriffe *grösser* z. B. $a > b$ nichts Anderes seien, als $a - c = b$, dass von der Grösse (a) etwas, (c), weggenommen werden*

müsse, damit sie der Grösse (b) gleich werden könne. Aber nun zeigt man, dass so klein auch c sei, immer noch eine kleinere Grösse (j) gefunden werden könne, und dass nun $a - j = b$ als Widerspruch in: $m = n$ enthalten sei. Und da in der Analysis schon bewiesen ist, dass eine grössere Grösse nicht kleiner sein kann als eine kleinere, so kann auch die Gleichung: $a - c = b$, nicht statt finden; sondern sie wird im Widerspruche mit $m = n$, wie mit $a = b$ sein müssen, weil ja schon: $a - j = b$ im Widerspruche mit beiden Gleichungen ist. Dasselbe beweist man auch auf dieselbe Art von $a < b$.

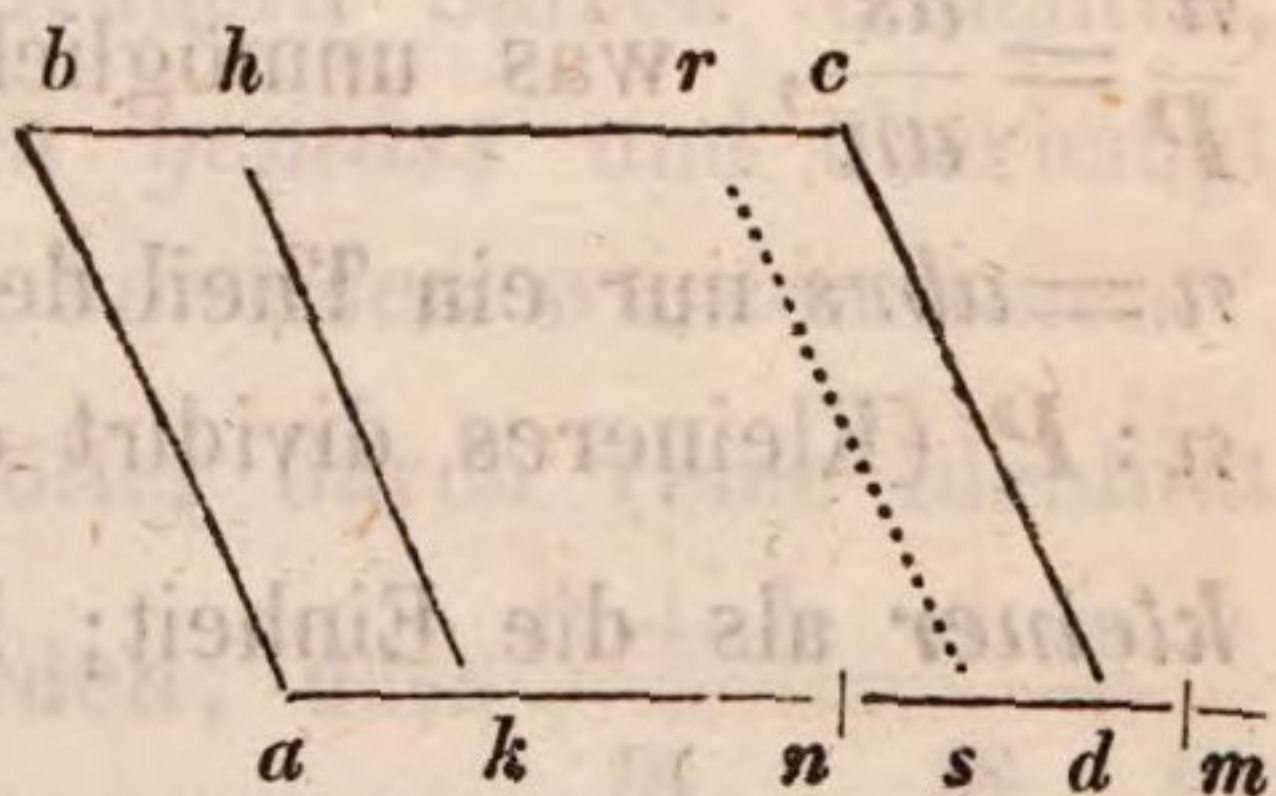
Also $a > b$ oder $a < b$ ist nicht *unmittelbar* Widerspruch von: $m = n$, (wäre diess, so müsste allerdings $a = b$ in $m = n$ enthalten sein, und es müsste auch als in ihm enthalten gefunden werden können), sondern der Widerspruch mit $m = n$ wird erst durch $a - j = b$ gesetzt und für $a - c = b$ vermittelt. Und da der Satz: $a = b$ nicht unmittelbar in: $m = n$ enthalten ist, so kann er auch nicht als in ihm enthalten gefunden werden, auch nicht, wenn man auf die rechte Art, ja mit himmlischer Einsicht darnach suchen und forschen würde.

Es ist also ganz anders, als man sich die Sache vor aller Analyse vorgestellt hatte. Der neue Satz $a - j = b$ ist unmittelbar als Widerspruch in $m = n$ enthalten, aber nicht der Satz $a - c = b$, oder $a > b$. Zunächst kann man ja nur von $a = b$ zu dem allgemeinen Widerspruche $a > b$, oder $a - c = b$ übergehen, und dann erst zu dem besondern vermittelnden Satze: $a - j = b$. Und was von j gilt, das gilt um so mehr von c . Dadurch allein wird der Zusammenhang eines vorhergehenden Satzes $m = n$ mit einem nachfolgenden Satze $a = b$ hergestellt.

Diese Vermittlung kann aber nur geschehen in dem Schema des indirecten Beweises. Denn der vermittelnde Satz $a - j = b$ ist in den indirecten Sätzen $a > b$, $a < b$, und nicht in dem directen Satze $a = b$ enthalten. Der Satz $a \gtrless b$ (grösser

oder kleiner) ist aber im Widerspruche mit Gleich, und da die Gleichheit bewiesen werden soll, so ist einleuchtend, dass sie nur auf dem Wege von Grösser und Kleiner, auf dem Wege der Contradiction durch Aufhebung von Grösserem und Kleinerem bewiesen werden könne. — Es ist klar, dass die contradictorischen Beweise (wie alle Beweise) nur dann zu etwas Wichtigem führen können, wenn schon das bestimmte Axiom einer Wissenschaft und mit dem Axiome die Operation dieser Wissenschaft gefunden ist. Denn das Axiom allein giebt sowohl den Mittelbegriff, wie z. B. in der Mathematik den Begriff der Gleichheit, als auch die Contradiction des Mittelbegriffs (Nicht-Gleich, Grösser oder Kleiner, durch Addition oder Subtraction), und nur darin können die Beweise wahrhaft geknüpft, und etwas Neues, nicht bereits Enthaltene an Vorhergehendes angeschlossen werden. Darum können auch diese Beweise, die in der Logik und Metaphysik Schattenbilder bleiben, in ganzer Schönheit und Lebendigkeit nur in den bestimmten Vernunft-Wissenschaften, wie in der Mathematik, geführt werden.

Z. B. Es soll bewiesen werden, dass zwei Parallelogramme von gleicher Höhe, das Parallelogramm $abcd$ und das Parallelogramm $ab hk$, die wir durch P und p bezeichnen werden, ihren Grundlinien G, g (ad, ak) proportional seien, auch wenn die Grundlinien G, g nicht *commensurabel* sind. (Vorausgesetzt wird, dass diese Proportion statt finde, wenn die beiden Grundlinien *commensurabel* sind.)



Beweis. Wären die Parallelogramme P und p nicht im Verhältnisse ihrer Grundlinien G und g ; fände also nicht die Gleichung statt: $P : p = G : g$, so müssten die Gleichungen statt finden $P : p < G : g$, oder: $P : p > G : g$. Im ersten Falle müsste von der Linie G , (ad) eine Linie (etwa $nd=c$) subtrahirt werden, damit $\frac{P}{p} = \frac{G-c}{g}$, d. h. $\frac{P}{p} = \frac{an}{ak}$

stattfände. Nun giebt es eine Linie j , die mit ak commensurabel und zugleich kleiner ist, als die Linie nd (kleiner als die Differenz $(ad - an)$). Es ist immer möglich, dass durch beliebige Halbierungen der Linie ak eine solche Linie j gefunden werde. Die Linie j ist mit ak commensurabel, aber nicht mit ad (weil die zwei Grundlinien: ak und ad als *incommensurabel* vorausgesetzt worden sind.) Wird daher j von der Linie an beliebig oftmal weggenommen, so bleibt endlich eine durch j messbare Linie as und ein Rest (sd) , der *kleiner* ist als j , und der also um so mehr noch kleiner ist als nd , da j schon kleiner ist als nd . Zieht man die Linie rs parallel mit ab , so entsteht ein neues Parallelogramm $abrs$, das wir mit π bezeichnen werden. Die Grundlinie as dieses Parallelogramms π ist mit der Grundlinie ak des Parallelogramms p commensurabel, und es findet (nach einem früher bewiesenen und vorausgesetzten Satze die Gleichung statt, $\pi:p = as:ak$ (1). Nach der Voraussetzung fände aber auch die Gleichung statt: $\frac{P}{p} = \frac{an}{ak}$ (2). Diese beiden

Gleichungen (1), (2) durch einander dividirt, geben das Resultat: $\frac{\pi}{P} = \frac{as}{an}$, was unmöglich ist. Denn da das Parallelogramm

$\pi = abrs$ nur ein Theil des Parallelogramms $P = abcd$ ist, so ist $\pi:P$ (Kleineres dividirt durch Grösseres) ein ächter Bruch und *kleiner* als die Einheit; hingegen $\frac{as}{an}$ (da $as > an$) ist ein

unächter Bruch und *grösser* als die *Einheit*. Ist $\frac{\pi}{P} = 1 - \alpha$,

und $\frac{as}{an} = 1 + \mu$; so wäre, wenn die Gleichung $\frac{\pi}{P} = \frac{as}{an}$

stattfinden könnte: $1 - \alpha = 1 + \mu$, was unmöglich ist, da das Kleinere $(1 - \alpha)$ niemals dem Grössern $(1 + \mu)$ gleich sein kann. Es ist also die Voraussetzung unmöglich, dass

$\frac{P}{p} < \frac{G}{g}$. — Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, dass auch

die andere Voraussetzung unmöglich sei, dass $\frac{P}{p} > \frac{G}{g}$.

Es folgt daher, dass $\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$ sein müsse, was zu beweisen war.

Dieser neue Satz ist nicht in dem vorhergehenden Satze schon enthalten, denn der vorhergehende Satz ist partikulär, und gilt nur bei commensurabeln Grundlinien, und der neue Satz ist allgemein, er gilt bei allen Grundlinien, sie mögen commensurabel sein, oder nicht. Es wird nichts abgeleitet, was im vorhergehenden Satze schon enthalten wäre, und das nur der Entwicklung in Operationen bedürfte, um zum Vorscheine kommen zu können, sondern der neue Satz wird mit den vorhergehenden Sätzen durch *andere* Sätze verknüpft, die nicht blosse Ausführungen enthaltener Operationen sind, sondern die wesentlich andere und neue Anhaltspunkte herbeischaffen. So wird der neue Satz mit frühern Sätzen in solchen Zusammenhang gebracht, dass die früheren Sätze nicht wahr sein könnten, wenn nicht auch der neue Satz wahr wäre. Diess drückt nicht aus, dass die neuen Sätze in den frühern Sätzen enthalten, sondern dass sie den frühern Sätzen *gemäss* und überhaupt dem *Axiome* gemäss aufgestellt und bewiesen worden seien.

Solche Beweise werden auch öfter durch reine Identität geführt. Z. B. Es soll bewiesen werden, dass $\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$.

Beweis durch Identität: Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches, also $\left(\frac{a+b}{m}\right) m = \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) m$, oder

$a + b = \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) m$; die Summe

zweier Grössen $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right)$ wird mit m multiplicirt, wenn jede

einzelne Grösse mit m multiplicirt wird, also $(a + b) =$

$\frac{a}{m} \cdot m + \frac{b}{m} \cdot m$, oder $a + b = a + b$.

In den Beweisen durch reine Identität setzt man etwas voraus und weis't dann nach, dass man in rechtmässiger Analyse zu einer Identität gelange. — Sie sind abgekürzte indirecte Beweise. Denn streng genommen sollte man sagen: Wenn $\frac{a+b}{m}$ nicht $= \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ ist, so ist $a+b$ grösser oder kleiner als: $\frac{a}{m} + \frac{b}{m}$, und dann findet man endlich, dass $a+b$ grösser oder kleiner als: $a+b$ sein müsste, was unmöglich ist, da Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches giebt. Der Beweis durch die Identität ist immer ein kühner Schritt, denn es ist nur zu leicht möglich, dass ein Zirkel im Beweise gemacht werde. Das Resultat $a+b = a+b$ ist gleichsam stumm, es zeigt nicht an, was in ihm enthalten sei. Man sollte immer die überzeugendere Form der contradictorischen Beweise vorziehen. Nur bei grosser Uebung kann ein solcher Schritt erlaubt sein, und man muss immer im Geiste den Widerspruch des Grössern und Kleineren festhalten können. Ist man aber durch Uebung 'sicher, keinen Zirkel im Beweise gemacht zu haben, so ist diese Form eben so bindend, wie die contradictorische, sie ist ja die contradictorische Form selbst, nur in gedrängter Kürze und Darstellung.

Die indirecten Beweise werden also auch durch Substitution ausgeführt. Es wird auch Gleiches statt Gleichem gesetzt, und Gleiches durch gleiche Operationen umgeformt. Nur wird noch ein Widerspruch mit der zu beweisenden Wahrheit gesetzt, und *gerade dieser Widerspruch* wird durch Substitutionen so umgeformt, dass er als offener Widerspruch eines bereits bewiesenen Satzes erkannt wird, woraus man einsieht, dass der Widerspruch falsch, also der *neue Satz*, zu dem er im Widerspruche steht, wahr sei. — Die directen Beweise werden auch durch Substitutionen ausgeführt, es werden mit gleichen Grössen gleiche Operationen vorgenommen; allein die Sätze, die durch Substitutionen umgeformt werden, sind schon ge-

geben, und brauchen nicht erst durch ihren *synthetisch* aufgestellten Widerspruch, der als Widerspruch eines bereits erkannten Satzes nachgewiesen wird, erprobt zu werden.

Die Beweise jeder Wissenschaft sind also doppelter Art, directe und indirecte Beweise. — Direct werden diejenigen Sätze bewiesen, die blosse Umformungen und Ausführungen früherer Sätze sind, die in ihnen schon enthalten waren, und die nur der Ausführung in einzelnen Operationen bedurften, um als neue Sätze hervortreten zu können. Es ist nicht gleichgültig, ob diese Sätze direct oder indirect bewiesen werden; sie müssen direct bewiesen werden, weil der indirecte Beweis in diesem Falle auf Tautologien führen würde. Hingegen alle Sätze, die in früheren Sätzen nicht schon enthalten sind, die also als wahrhaft neue Sätze angereicht werden, müssen indirect bewiesen werden. Könnten sie direct bewiesen werden, so müssten sie schon in früheren Sätzen enthalten sein, was ein Widerspruch ist, da sie neue Sätze sein sollen.

Wenn man einen wahrhaft *neuen* Satz hat, wie soll man ihn an die früheren Sätze anschliessen, ohne die Continuität der Wissenschaft zu unterbrechen? Diess kann offenbar nur nach dem Schema geschehen: Wäre dieser Satz nicht wahr, so könnten auch die vorhergehenden Sätze nicht wahr sein.

Freilich müsste Alles schon in einem ersten Satze enthalten sein, *wenn das Axiom so weit und so allgemein wäre, dass es Alles auch seinem Inhalte nach einschliesse*. Diess kann am Ende der Wissenschaft geschehen, und als ihr Resultat ausgesprochen werden; aber am Anfange ist es unmöglich. Vielleicht beginnt man von Einzellnem, und erweitert nach und nach das Axiom, bis es endlich allen Sätzen gewachsen ist. Aber *formell* durch die Art der Verbindung der Begriffe muss das Axiom alles einschliessen, was zu dieser Wissenschaft gehört, und alles ausschliessen, was zu dieser Wissenschaft nicht gehört. Die Beweise sind nicht Entwicklungen des Axioms, sondern Entwicklungen *gemäss* des Axioms, dass in Allem

wesentlich *auf dieselbe Art gedacht werde, wie im Axiome*, nicht dass *dasselbe* gedacht werde, wie im Axiome. Diess könnte nur uneigentlich gesagt werden. Am Ende der Wissenschaft kann man freilich Alles im Axiome mitdenken, aber während der Wissenschaft selbst muss Alles im Axiome erst hervorgebracht werden. Darum wird das Axiom der Mathematik zuerst in Addition, dann in Multiplication, dann in Potenzirung u. s. w. und endlich in allen Operationen und Sätzen ausgeführt.

Wie kann es aber kommen, dass in systematischen Wissenschaften directe und indirecte Beweise auf einander folgen und neben einander bestehen können? Die Untersuchung dieser Frage kann Aufschluss über die Wissenschaft selbst geben. Jede Wissenschaft soll Synthesis von Erkenntnissen sein. Jede wahre Synthesis ist aber *mehr* als blosser Analysis, und muss *mehr* geben, als schon in einem ersten Satze enthalten ist. Diess Mehr kann aber nicht analytisch durch directe Beweise, sondern allein synthetisch durch indirecte Beweise hervorgebracht werden. Und so würde es ursprünglich in jeder Wissenschaft *nur* indirecte Beweise geben. Weil aber die durch indirecte Beweise gefundenen Sätze Vieles enthalten, was herausgehoben und entwickelt zu werden verdient, damit der ganze Reichthum der Erkenntniss erschlossen und offenbar gemacht werde, so werden die in ihnen enthaltenen Sätze durch *directe* Beweise herausgehoben. Sie dienen auch zur Erhärtung der nachfolgenden neuen Sätze in indirecten Beweisen. Ein vollkommener Geist aber, der Alles, was in einem ersten Satze enthalten ist, auch ohne Entwicklung und Ausführung sehen könnte, würde in seiner Wissenschaft nur wenige Sätze haben, lauter synthetische Erkenntnisse in indirecten Beweisen. Die Synthesis ist aber nothwendig, weil nur vom Einzelnen aus mit Sicherheit begonnen werden kann.

Man soll in jeder Wissenschaft zu vielen wahren Sätzen gelangen. Diess ist nur möglich, wenn das Axiom formell so allgemein ist, dass es Widerspruch von vielen Sätzen zugleich

sein kann. Die Gegensätze aller durch das Axiom ausgeschlossenen Sätze sind dann die auf einander folgenden Wahrheiten einer und derselben Wissenschaft, die durch das Axiom geschützt werden. So ist es in der Mathematik. Das Axiom: Was demselben gleich ist, ist auch unter sich gleich, ist Widerspruch der Sätze: Was demselben in *Addition* gleich ist, ist unter sich nicht gleich; was demselben in *Multiplication* gleich ist, ist unter sich nicht gleich &c.; und die Contradictionen dieser Sätze: Was demselben in *Addition* gleich ist, ist auch unter sich gleich, was demselben in *Multiplication* gleich ist, ist auch unter sich gleich &c., diese Sätze bilden die auf einander folgenden Wahrheiten der Mathematik. Der Fortschritt muss also im Axiome gegeben sein; das Axiom muss aus seiner Unthätigkeit herausgehoben, und in verschiedenen Operationen gegliedert werden können; es muss nicht einfach bleiben, sondern zusammengesetzt werden, es muss aber *formell* dasselbe sein, dieselbe Art der Verbindung der Begriffe herstellen, damit es Axiom einer und derselben Wissenschaft bleiben könne.

In der wahren Wissenschaft wird *bewiesen*, indem die Uebereinstimmung des Denkens in allen zu einer Wissenschaft gehörenden Sätzen hergestellt wird. Es wird mit bekannten und unbekannten Grössen auf dieselbe Art gedacht und operirt, und endlich ein Resultat gefunden, welches das Unbekannte in bekannten Ausdrücken giebt. Möge nun dabei direct, oder indirect verfahren worden sein, die Einsicht, die am Ende gewonnen wird, ist ganz und gar dieselbe, dass das Denken in diesem Resultate mit sich selbst in Uebereinstimmung sei. Wenn ich finde, dass $a = b$ ist, so habe ich dieselbe Einsicht, ich mag es direct, oder indirect gefunden haben. Geben die directen Beweise Einsicht in den „schöpferischen“ Hergang einer Sache, so geben diess noch vielmehr die indirecten Beweise; denn die directen Beweise geben die Einsicht der *Entfaltung*, die indirecten Beweise die Einsicht der *Hervorbringung* neuer Sätze. Ja wird die Frage gestellt, welche Beweise *wichtiger* seien, so muss

die Antwort offenbar für die indirecten Beweise günstig ausfallen. Denn *sie* sind es, die die ersten Hauptsätze jeder Wissenschaft und ihres Fortschrittes hervorbringen; die directen Beweise hingegen geben nur die Nebensätze, die ausfüllenden Sätze jedes neuen Abschnittes. Sind erst die Hauptsätze da, so können sie vielfach entwickelt werden; würden aber die Hauptsätze fehlen, so könnten auch die Nebensätze nicht entwickelt und ausgeführt werden. Die indirecten Beweise sind die wahren Grundpfeiler jeder Wissenschaft, sie geben Synthesis a priori. Sie sind die Stützen der menschlichen Vernunft, die von Bestimmtem und Einzelem beginnen muss, und nicht anders kann; die sich aber vom Einzelnen aus zum Fortschritte zu allen ferneren Einzelheiten und zum Ganzen einzig und allein durch die indirecten Beweise befreien und erheben kann.

Die menschliche Wissenschaft hat directe und indirecte Beweise, wie sie der Ordnung nach auf einander folgen. Eine Wissenschaft in lauter *indirecten* Beweisen wäre nur dann möglich, wenn der erkennende Geist so vollkommen wäre, dass er in jedem Satze alles in ihm Enthaltene sehen könnte, und eine Wissenschaft in lauter *directen* Beweisen wäre nur möglich, wenn der Geist entweder ganz vollkommen wäre, dass er das Axiom jeder Wissenschaft in seiner ganzen Allgemeinheit und mit seinem ganzen Inhalte auf der Stelle erblickte; oder aber, wenn bei unvollkommener Erkenntniss alle Hauptsätze einer Wissenschaft ihrer Ordnung nach vom Himmel fielen, dass wir sie nur anzunehmen, und ihrer Aufeinanderfolge nach in directen Beweisen aus einander zu setzen brauchten. Es wird wohl nur die menschliche Wissenschaft die mögliche und allein richtige sein.

Es war von grossem Nachtheile für die Wissenschaft, dass man das Wesen der indirecten Beweise so ganz verkannt hat. Man war dadurch gezwungen, die Synthesis a priori zu läugnen, und die Wissenschaft aufzugeben; und es war consequent, diess einzugestehen, so lange man die indirecten Beweise nicht unter-

sucht hatte. Man hat es hingenommen, dass sie schwache Beweise seien, Fremdlinge in der Wissenschaft, die man so bald als möglich verbannen müsse, da man Alles (vielmehr Nichts) viel besser direct beweisen könne; man hat sich diess ohne alle Widerrede einreden lassen, man hat die wichtigste Waffe der wissenschaftlichen Eroberungen ohne allen Grund auf blosser unverbürgte Nachrichten hin weggeworfen. Nur die Mathematik ist ihre eigenen Wege gegangen, und hat Fortschritte gemacht, sie hat sich durch die Kritik der reinen Vernunft nicht aufhalten lassen. Nicht die Anschauung in Zeit und Raum, nicht die Erfahrung schafft Synthesis a priori, sondern die indirecten Beweise schaffen sie. Synthesis a priori findet sich eben so häufig in der mathematischen Analysis, wie in der Geometrie, und doch setzt die Analysis keine Anschauung voraus. Alle ersten und hauptsächlichsten Sätze der auf einander folgenden Abschnitte der Analysis werden indirect bewiesen, z. B. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches; Gleiches zu gleichen Potenzen erhoben, giebt Gleiches; Gleiches auf gleiche Art logarithmirt, giebt Gleiches, die Differenzialien gleicher Functionen sind einander gleich, und das erste Differenzial dem ersten, das zweite dem zweiten gleich &c. — Alle diese Sätze können nur indirect bewiesen werden; aber sind sie bewiesen, dann sind die Ausführungen vielfach, die mit ihnen vorgenommen werden können. — Alle ersten Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik, die ersten Kriterien der Congruenz, der Aehnlichkeit, der Messbarkeit der Figuren und Körper werden indirect bewiesen, — und diess ist das Geheimniss der Fortschritte aller mathematischen Wissenschaften, dass ihre ersten Anwendungen auf wirkliche Naturgesetze indirect bewiesen und dann in directen Lehren weiter ausgeführt werden, wie es auch wünschenswerth und nothwendig ist. Die indirecten Beweise knüpfen Verständniss an Verständniss, ja sie befreien den Geist zur Einsicht, dass er zwar allerdings nur vom Einzelnen beginnen könne, dass er aber, wo er auch immer beginnen möge,

nach erlangter Wissenschaft, Alles an Alles reihen, und dieselbe Sicherheit der Erkenntniss gewinnen könne, er möge von diesem oder von einem andern Punkte aus begonnen haben.

Es bleibt noch übrig, die Lehren der Logik zu beachten. *Wie* wird bewiesen? Diess ist die Frage. In den bestimmten Vernunftwissenschaften wird geantwortet, dass dadurch bewiesen werde, dass die Identität des Denkens in verschiedenen Sätzen einer Wissenschaft hergestellt wird. Diese Identität wird aber durch Substitution hergestellt. Die Logik hingegen antwortet: Es wird durch *Syllogismen* bewiesen. Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, also ist Cajus sterblich. — Diess ist keine grosse Weisheit.

Die Mathematik beweist *nicht* durch Syllogismen, sondern durch Substitutionen und Gleichungen. Zum Wesen des Syllogismus gehört, dass sich Subject und Prädicat einstellen, aber in einem mathematischen Satze, z. B. $3 \cdot 4 = 12$, ist weder Subject, noch Prädicat, sondern Gleichheit vorhanden. Man kann eben so gut sagen, $12 = 3 \cdot 4$, wie $3 \cdot 4 = 12$, und alle mathematischen Sätze können umgekehrt werden, ohne *identisch* zu sein, da sie wesentlich verschiedene Operationen enthalten. Aber Subject und Prädicat können nicht willkürlich vertauscht werden. Diess ist Unterschied genug.

Dennoch drängt sich der Syllogismus in die Mathematik ein, er hört aber da auf, wo die Beweise anfangen, oder er fängt da an, wo die Beweise aufhören. Z. B. die Multiplication ist allgemein gültig, also ist sie auch in dem besonderen Falle, der jetzt kömmt, gültig. — Auf dieses kömmt es aber im Beweise nicht an, sondern darauf, *wie* die Multiplication ausgeführt werden soll, und was sie gebe. Der Syllogismus nützt also in der Mathematik nichts, er kann aber bei besonderen Lebens-Einrichtungen sehr nothwendig sein. Wenn z. B. die allgemeinen Gesetze und Vorschriften unklar gegeben werden, da kann der Fall eintreten, dass der Syllogismus nachhelfen müsse, wie es dem Einzelnen in den einzelnen Fällen gelingen möge, das

Rechte zu treffen. Diess ist aber kein Beweis; denn den Beweis haben die Gesetzgeber schon geliefert, oder sollen ihn wenigstens geliefert haben. Es ist bloss Anwendung der Beweise. Anders ist es in den Werken der Natur; in ihnen ist keine Schwäche, keine Unklarheit im Entwurfe und in der Ausführung, und die Aufgabe der Wissenschaft ist, nicht die Werke der Menschen, sondern die Werke der Natur zu enthüllen.

Manchmal tritt auch noch der Syllogismus da ein, wo die Beweise aufhören. Z. B. ⁶⁾ „Wenn die Bedingungen der Aehnlichkeit der Dreiecke auf die kleineren Dreiecke angewendet werden, die im rechtwinkligen Dreiecke durch das von der Spitze gefällte Loth entstehen, so *geht die Aehnlichkeit derselben unter sich und mit dem umschliessenden Dreiecke rein durch den Syllogismus hervor*. Denn wenn Dreiecke unter einander gleiche Winkel haben, so sind sie ähnlich (d. h. wenn sie der Ordnung nach gleiche Winkel haben); die drei betreffenden Dreiecke haben unter sich gleiche Winkel; also sind sie ähnlich.“ — Hier hilft sogar die Logik der Mathematik aus. Es ist nur Schade, dass sie nicht auch zeigt, *dass die drei betreffenden Dreiecke der Reihe nach unter sich gleiche Winkel haben*, und diess ist nachgerade die Hauptsache und der wirkliche Beweis. Diess muss leider die Mathematik zeigen, sie muss daher alles leisten, was geleistet werden soll. Denn *gleiche Winkel* haben und *ähnlich* sein, ist identisch für die Dreiecke. Der Syllogismus bringt also einen Namen für einen andern (*gleichwinklig, ähnlich*), und wiederholt hier sogar das Geschäft der Definition. Das Wesen aber hat die Mathematik hervorgebracht.

Im Syllogismus wird allerdings der Beweis des Besonderen aus dem Allgemeinen nach dem Grundsätze der Identität des Denkens hergestellt. Aber das Ganze ist fast unnütz. Denn

⁶⁾ Trendelenburg, Logische Untersuchungen XV.

weil das Allgemeine schwerer zu erkennen ist, als das Besondere, so ist das Besondere schon *vor* und *mit* dem Allgemeinen erkannt. Daher sind alle Beweise durch die Syllogismen, in denen nur Besonderes für Allgemeines substituiert wird, mehr Beweise zur Uebung, wie man reden müsse, damit das Besondere als Besonderes dieses Allgemeinen erkannt werde. Die allgemeine Form dieser Beweise ist aber die durch Substitution, in welcher, nicht *Besonderes* aus *Allgemeinem*, sondern *Allgemeines* aus *Allgemeinem* erkannt wird, wie hinreichend auseinander gesetzt worden ist. Alles hat sein Gutes, auch der Syllogismus.

Wenn man den Umstand ausser Acht lässt, dass die Schulphilosophie ohne allen Einfluss auf die wirklichen Wissenschaften geblieben ist, so kann es allerdings unbegreiflich scheinen, wie sich der Syllogismus nicht nur in der formalen Logik erhalten, sondern es auch in der *Hegel'schen* Logik sogar zu einer Art von Apotheose bringen konnte. Aber die *Isolirung* erklärt Alles. An eine Wand kann man einen Hacken, und an den Hacken ein Bild malen. Man wird dadurch den Schein hervorbringen können, als ob der Hacken das Bild trage. Würde man aber genöthigt werden, an diesem Hacken ein wirkliches Bild in Goldrahmen zu befestigen, so würde die Enttäuschung schnell genug eintreten müssen.

Selbst im gewöhnlichen Leben bedient man sich nicht des Syllogismus, sondern der Substitution, wenn man Begriffe von Begriffen, oder Wahrheiten von Wahrheiten ableiten will. Jeder setzt allgemein Begriff für Begriff; nur die Logik substituiert die Art für das Geschlecht. Sie hat es aber noch nie gewagt, die wirklichen Arten und Geschlechter festzustellen. — Die Substitution ist nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Naturforschung sehr bekannt. *Whewell* ⁷⁾ nennt sie *Deduction*,

⁷ History of the inductive Sciences.

im Gegensatze zur *Bacon'schen Induction*, welche *alle* substantiellen Wahrheiten liefern soll. Allein die Induction ist nicht ein Verfahren, die Wahrheiten zu *beweisen*, sondern sie zu *finden*; Deduction hingegen soll die Wahrheiten nicht finden, sondern, wenn sie gefunden sind, beweisen. In diesem Sinne ist sie aber selbst in der Naturforschung wenig bekannt. — Da sie die Mathematik allein als wahre *Substitution* kennt und anwendet, so wird diese Benennung, wie sie die bezeichnendste ist, auch die richtigste sein. Die Deduction der Wahrheiten ist nur eine Folge der Substitution; die Substitution aber deckt den innern Hergang auf, wie Wahrheiten aus Wahrheiten abgeleitet und bewiesen werden.

Eilfte Untersuchung.

Ueber die Auffindung der Lehrsätze.

Mit der Lehre von den Beweisen steht die Lehre von der Auffindung der Wahrheiten im engsten Zusammenhange. Da die Regeln der Beweise, wie sie in Substitutionen und Contradictionen ausgeführt werden, hinlänglich erläutert sind, so bleiben noch die Gesetze zu enthüllen übrig, nach welchen das Material zu neuen Lehren gefunden, und in die allgemeine Form von Wahrheiten erhoben werden könne.

Aehnlich, wie sich die Beweise in die Substitutionen und Contradictionen spalten, spalten sich auch die Erhebungen der Sätze zu Urtheilen in zwei Operationen, in die *Induction* und in die *Analogie*, und diese entsprechen genau den zwei Operationen der Beweise. Die Induction entspricht dem directen Verfahren der Beweise in Substitutionen, und die Analogie entspricht dem indirecten Verfahren der Beweise in Contradictionen.

Die Wurzeln der Induction sind Abstraction und Combination; die Wurzeln der Analogie sind Reflexion und Reduction auf das Allgemeine. Und wird die Herstellung der zu beweisenden Sätze ein *Urtheilen* genannt, so werden alle Urtheile durch Induction und Analogie gebildet, sowie sie alle durch Substitution und Contradiction bewiesen, d. h. geschlossen werden. — Wir handeln zuerst von der Induction.

Die Induction spaltet sich in die beiden Wurzeln der Abstraction und Combination. Das Wesen der Abstraction besteht darin, dass in allen vorhergehenden Sätzen von allem Verschiedenen und Unterscheidbaren abgesehen, und nur das Uebereinstimmende oder Gemeinschaftliche beachtet und hervorgehoben werde. Das Wesen der Combination besteht darin, dass das gefundene Neue mit allem Vorhergehenden zusammengestellt und verglichen, dass der Versuch gemacht werde, ob aus diesen Zusammenstellungen neue Wahrheiten hervorgehen, oder nicht.

Durch die Abstraction werden zuerst die verschiedenen Operationen einer Wissenschaft gefunden. Es wird z. B. in der Mathematik gezeigt, dass zwei Grössen $(a + b)$ eine dritte Grösse x geben; dieser Satz wird erweitert, und man findet, dass die drei Grössen $(a + b + c)$ eine vierte Grösse y geben u. s. w., und endlich, dass eine beliebige Anzahl von Grössen wieder eine Grösse geben, dass $(a + b + c + \dots + m) = z$ sei. Nun ist es das Geschäft der Abstraction, dass sie anfangs diesen Satz einschränke, und unter den addirten Grössen lauter gleiche Grössen verstehe: $(a + a + a + \dots + a) = z$; und dass sie dann diesen Satz zu einer neuen Operation, zur *Multiplication* umbilde, indem sie ausspricht: eine Grösse a , m mal genommen, giebt eine neue Grösse ihrer Art, wofür sie das Multiplications-Zeichen einführt: $ma = z$. — So ist der Stoff zu einem neuen Lehrsatz gefunden, der etwa so ausgesprochen werden kann: Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches, und dieser Satz wird gerade so bewiesen werden können, wie er gefunden worden ist.

Nun wird in der Multiplication gezeigt, dass beliebig viele Grössen mit einander multiplicirt eine neue Grösse geben, oder dass: $abc \dots m = z$ sei. Die Abstraction sieht von der Verschiedenheit der multiplicirten Grössen ab, und nimmt sie als gleiche Grössen: $a . a . a . \dots a_m = z$. Sie gelangt dadurch zu der neuen Operation der Potenzirung, indem sie ausspricht

Eine Grösse a zu einer Potenz m erhoben, giebt eine Grösse ihrer Art, wofür sie das Zeichen $a^m = x$ einführt. Darin liegt der Stoff zu dem neuen Lehrsatz: Gleiches zu gleichen Potenzen erhoben, giebt Gleiches; und dieser Lehrsatz wird so bewiesen, wie er gefunden worden ist.

Durch diese Gliederung des Axioms in verschiedene Operationen, die dem Wesen nach dieselben Operationen sind, nur Einschränkungen, Abkürzungen, Verinnerungen von einander, indem durch *eine* nachfolgende Operation gegeben wird, was nur durch *viele* vorhergehende gegeben werden könnte, wird die Identität des Denkens und der Wissenschaft bewahrt. Und diess ist auch nothwendig; denn würde hier nicht diese Identität bewahrt werden, so würde sie auch durch keinen nachfolgenden Beweis hervorgebracht, oder wieder hergestellt werden können. Diess zeigt aufs Deutlichste, dass auch die Erfindung der Wahrheiten bestimmten Gesetzen unterworfen sein müsse. Denn der blosse Zufall wird nicht eine Identität bewahren können, die er gar nicht kennt. — Ueberhaupt besteht die Gliederung des Axioms darin, dass der Stoff eingeschränkt, und die Operation erweitert werde. Es ist Besonderung des Stoffes, Abstraction von ihm und Verallgemeinerung der Operation. Je mehr aber die Operation über den Stoff vorherrschend wird, desto energischer und innerlicher werden auch die Erkenntnisse werden.

Der grossartige Fortschritt einer Wissenschaft besteht aber nicht bloss in einem Fortschritte von einem Lehrsatz zu einem nachfolgenden Lehrsatz, sondern von einem Abschnitte zu einem nachfolgenden Abschnitte. Es wird in einem Abschnitte alles Zusammengehörige zu einem Ganzen vereinigt, es wird von dem Besondern, Unterscheidenden abgesehen, und das allen Gemeinschaftliche als Ganzheit herausgestellt. — So wird in der Analysis zuerst der Abschnitt der *Ur-Operationen* gebildet, unter welchen Additionen, Multiplicationen, Potenzirungen, Logarithmirungen &c. verstanden werden. Kann zwar in dieser ersten Abtheilung nicht in apriorischen Gesetzen gezeigt werden, wie

man nothwendiger Weise zu den ferneren Uoperationen, z. B. zu den trigonometrischen Functionen &c. gelange, da sie am Anfange nicht einmal *zufällig* gefunden, oder divinirt werden könnten, so schadet diess dem Zusammenhange des Systems nicht im Geringsten. Man begnügt sich anfangs, die wenigen, bekannten und ableitbaren, Urfunctionen aufzustellen, und mit ihnen sogleich zu den nachfolgenden Abtheilungen der Analysis überzugehen. Jede derselben liefert Resultate, die eben sowohl die vorhergehenden Gebiete bereichern, als die nachfolgenden einleiten, und jede neue Bereicherung wird zu dem vorhandenen Erkenntnissen in allgemeiner Ordnung hinzugeschlagen, so dass erst mit dem letzten Gebiete zugleich alle vorhergehenden vollkommen gemacht werden. So baut sich das System der Wissenschaft allmählig und organisch auf. Mit geringen Anfängen, die nicht in ihrer Geringheit abgeschlossen, sondern als *einstens* vollendbar betrachtet werden, wird zu weiteren Gebieten fortgegangen, und in rechtmässiger Methode Alles entwickelt, was zu den vorhergehenden Gebieten hinzukommend, diese sowohl für sich, als für die Operationen, die von ihnen abhängig sind, erweitert und vervollkommnet.

Der Idee nach können aber sogleich alle Urfunctionen in der allgemeinen Definition zusammengefasst werden, dass sie Gleichungen der einfachsten Art seien, solche Gleichungen nämlich, in denen die eine Seite eine einfache Grösse, und die andere Seite eine einfache Operation ist; z. B. $y = x^m$, $y = \sin. x$ &c., die daher auch als wahre Operations-Elemente in die zusammengesetzten Gleichungen und Functionen eintreten werden. Zu sich selber aber müssen die Urfunctionen das Verhältniss haben, dass sie nicht in endlichen Gleichungen, sondern in unendlichen Reihen durch einander ausgedrückt werden können.

Bei ruhiger Ueberlegung stellt sich auf's Deutlichste heraus, welche Hilfsmittel die Mathematik durch die Entwicklung und Characteristik der Urfunctionen gewinnen werde. Die Urfunctionen heben vor Allem die mathematischen Operationen als

solche heraus, und führen sie aus dem unendlichen, unerkannten Gebiete allgemeiner Verbindungen in die Familie der bekannten und erläuterten Operationen ein. Dadurch gewähren sie eine vollständige Uebersicht der verschiedenen Abhängigkeit der Grössen von einander, und bestimmen die Summe der Elemente, die in allen möglichen mathematischen Problemen vorkommen können. Es kann Nichts als mathematische Aufgabe gegeben werden, was nicht in diesen Functionen aufgefasst, und zu Gleichungen gebildet werden könnte, und jede Aufgabe wird gelöst sein, wenn sie auf einen Ausdruck dieser Uperationen gebracht sein wird.

Wir sollen aber die bestimmten Operationen der Mathematik ihrer Aufeinanderfolge nach entwickeln, damit uns nicht etwa später in den zusammengesetzten Ausdrücken der Gleichungen Operationen begegnen, die wir noch nicht kennen gelernt haben, und mit denen wir also noch nicht umzugehen wüssten. Es ist natürlicher, einfacher und leichter, die Operationen, jede einzeln, für sich zu entwickeln, und zu erkennen, als sie erst in zusammengesetzten Verbindungen zugleich mit andern Aufgaben zu treffen, und nun an ihnen zu versuchen, was man vermöge. Schon die blosse Zusammensetzung der Ausdrücke schafft grosse und neue Schwierigkeiten; und würden noch zu diesen die eigenthümlichen Schwierigkeiten der Operationen hinzukommen, und nicht bereits überwunden sein, so dürfte leicht diese Gesammtheit von Schwierigkeiten unübersteiglich werden. Darum ist es besser, die Schwierigkeiten zu trennen, und die Urfunctionen einzeln für sich selbst zu behandeln.

Ferner drängt sich der Gedanke auf, dass man diese Urfunctionen so viel als möglich vermehren müsse. Denn da man weiss, dass es noch andere Functionen giebt, welche ganz den Charakter der Urfunctionen haben, so wird es darauf ankommen, dass man die rechten und nothwendigen Urfunctionen finde, und durch ihre Berechnung das Gebiet der Mathematik aufs Wesentlichste bereichere. Denn je mehr Urfunctionen ihren Ge-

setzen und Resultaten nach bekannt sind, eine desto grössere Anzahl von zusammengesetzten Gleichungen und Functionen, in denen sie als Operations-Elemente enthalten sind, wird auch gebildet und gelöst werden können.

Wie viele aber auch dieser Urfunctionen bekannt oder unbekannt sein mögen, immer werden sie zusammengehören, und den ersten Abschnitt der Analysis bilden müssen. Ich spreche von dem Systeme. Die Oekonomie des Unterrichts wird freilich Manches ganz anders gestalten müssen. Zu den späteren Urfunctionen wird man erst viel später gelangen, und überhaupt wird erst in den späteren Abschnitten der Analysis ihre Nützlichkeit, Vortrefflichkeit und Nothwendigkeit recht einleuchtend werden können.

Da nun alles Uebrige in der Analysis nur Zusammensetzungen der Grössen nach den Operationen der Urfunctionen sein kann, so wird sich als zweiter Abschnitt die Lehre von der *Zusammensetzung* oder *Combination* darstellen. Es ist einleuchtend, dass man zuerst die Gesetze der Combinationen einzeln kennen müsse, ehe man sie in den wirklichen Verbindungen der Grössen anwenden könne. Wollte man diess ausser Acht lassen, so würden sich bei den wirklich zusammengesetzten Ausdrücken doppelte Schwierigkeiten einfinden, nämlich die Zusammensetzung als solche, und der zusammengesetzte Ausdruck in Beziehung auf die in ihm enthaltenen Operationen. Man trennt die Schwierigkeiten und vereinfacht die Gesetze, indem man jedes einzeln entwickelt. Diese Trennung giebt aber die Lehre der Combinationen als zweites Gebiet der Analysis.

Nun kommen die wirklich zusammengesetzten Ausdrücke. Diese unterscheiden sich, je nachdem sie aus einer *endlichen* oder *unendlichen* Anzahl von Gliedern bestehen, in Gleichungen und Reihen. Die Gleichungen werden daher das dritte, und die Reihen das vierte grosse Gebiet der Analysis bilden. — Die Gleichungen spalten sich in zwei Abtheilungen, in die Gleichungen im eigentlichen Sinne, und in die Functionen. In

den Gleichungen selbst sind die unbekannten Grössen unabhängige und beständige Grössen, und haben eine bestimmte oder bestimmbare Anzahl von Werthen, je nachdem sie algebraische oder transcendente Gleichungen sind. In den Functionen hingegen sind zwei oder mehrere Grössen von einander abhängig, sie können also einzeln unendlich viele Werthe haben, obgleich sie, wenn sie nach einer veränderlichen Grösse aufgelöst werden, nur nach den Gesetzen der Gleichungen aufgelöst werden können. Die Functionen gehen in Gleichungen über, wenn alle veränderlichen Grössen bis auf eine als bekannte und beständige Grössen genommen werden. Die letzte veränderliche Grösse wird dadurch selbst eine beständige, wenn auch noch unbekannte Grösse.

Das vierte Gebiet der Analysis bilden die Reihen. Sie haben ihrer Natur nach eine unendliche Anzahl von Gliedern, wobei allerdings auch diejenigen Fälle betrachtet werden können, in denen nur einige dieser unendlich vielen Glieder gegeben sind. Diess hindert aber nicht, dass sie nicht augenblicklich in's Unendliche fortgesetzt werden können.

So stellen sich uns vier grosse Gebiete der Analysis in ihrer Aufeinanderfolge dar: *Urfunctionen*, *Combinationsen*, *Gleichungen*, *Reihen*. Und wir haben die Gewissheit erlangt, dass Nichts übergangen worden sei, und dass in dieser Richtung nicht weiter mehr fortgeschritten werden könne. Denn über das Unendliche hinaus kann nicht fortgegangen werden. Nun aber beginnt die Richtung nach Innen, wenn die einzelnen Gebiete auf sich selbst bezogen werden; und darin wird sich eine neue Reihe von Problemen einleiten. Es werden nämlich alle Ausdrücke, sie mögen Uoperationen, Combinationen, Gleichungen oder Reihen darstellen, als ein Ganzes zusammengefasst, und als Functionen überhaupt betrachtet, es wird in Allem, was sie gegen einander Besonderes und Auszeichnendes haben, abgesehen; und von da aus wird der Fortschritt nach Innen eingeleitet werden.

Jedoch kann die Abstraction niemals allein für sich bestehen. Man kann sie wohl getrennt denken, und einzeln untersuchen, aber in der Wirklichkeit der ausübenden Methode ist sie auf's Innigste mit der *Combination* vereinigt. Es ist nicht möglich, dass man von der Verschiedenheit absehe, ohne dass man zugleich die Absicht habe, das Ununterschiedene und Gleiche zu verbinden. Sieht man nämlich von der Verschiedenheit ab, so wird die Gleichheit gesetzt, sieht man von der Gleichheit ab, so wird die Verschiedenheit gesetzt. Unter Abstraction verstehen wir aber nicht das Denken, durch welches dasjenige, was abstrahirt wird, zu etwas Neuem gemacht, herausgenommen und untersucht wird; sondern durch die Abstraction soll umgekehrt dasjenige, was vom ganzen Gegenstande *trotz der Abstraction* übrig geblieben ist, herausgehoben und untersucht werden. So ist aus $a + b$, wenn $b = a$ gesetzt wird, $a + a$ geworden, und dasjenige, was nach der Abstraction von der Verschiedenheit der Grössen übrig geblieben ist, nämlich $a + a$, wird jetzt erst aufs Neue wieder untersucht. So wird immer der Stoff für die fernere Untersuchung erhalten. Das Abstrahirte ist das Verschwundene, Untergegangene, und nicht ferner ein Stoff der Betrachtung; wohl aber dasjenige, was nach der Abstraction übrig geblieben ist. Es ist wesentlich identisch mit dem Vorhergehenden, und dass es dieses sei, ist die Hauptsache für die Einheit der Wissenschaft.

Mit der Abstraction verbindet sich daher auf der Stelle die *Combination*, denn sie ist das in allen Abstractionen Beabsichtigte. — Zuerst erweitert die Combination die Lehrsätze, indem sie dasjenige, was z. B. von zwei Grössen bewiesen ist, auch von mehreren beweist oder als gültig darstellt. Z. B. wenn bewiesen ist, dass $a + b$ eine Grösse gebe, so werden $a + b + c$; $a + b + c + d$, u. s. w. verbunden wieder eine Grösse geben. Es wird wenigstens die Form, wenn auch nicht schon der Beweis eines Lehrsatzes hergestellt. In

dieser Form der Erweiterung wird z. B. bei dem binomischen Lehrsatz, als dem bekanntesten Lehrsatz verfahren. Dann verbindet die Combination jede Operation mit jeder vorhergehenden in doppelter Hinsicht, indem sie einmal die neue Operation auf jede vorhergehende, und das anderemal jede vorhergehende Operation auf die neue Operation anwendet. Sie stellt z. B. bei der neuen Operation der Radizierung die Fragen: in erster Reihe: Wie werden addirte, subtrahirte, multiplicirte, potenzirte, radizirte Grössen radizirt? und in zweiter Reihe: Wie werden radizirte Grössen addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, potenzirt, radizirt? Es ist einleuchtend, dass man dadurch auf alle nothwendigen Probleme kommen müsse, und dass man dadurch die Sicherheit und Ruhe des Forschens bewahren könne.

Ist nun aber einmal der Fortschritt nach Aussen vollendet, und wird Alles als Function aufgestellt, so wird die Methode der Combination nicht mehr auf die Uoperationen allein, sondern auf Alles angewendet, d. h. auf die Functionen schlechthin, damit auch hier alles unerkant Enthaltene herausgehoben und erkannt werde. Hier sind folgende Combinationen möglich:

1) Die in den Functionen enthaltenen Grössen können durch Addition vermehrt oder vermindert werden (Combination der Addition und Subtraction mit den Functionen),

2) Die in den Functionen enthaltenen Grössen können multiplicirt und dividirt werden. (Combination der Multiplication in Division mit den Functionen.)

3) Die in den Functionen enthaltenen Grössen können potenzirt, logarithmirt werden u. s. w. (Combinationen der Potenzen, der Logarithmen u. s. w. mit den Functionen.)

Dann können Functionen zu andern Functionen addirt, multiplicirt, potenzirt werden u. s. w., was ein ausgebreitetes Feld mathematischer Untersuchungen eröffnet.

Die erste Combination der Addition (und Subtraction) mit den Functionen schafft das Gebiet des *Differenzial-Calculus*.

Dieser Calcul umfasst nicht mehr und nicht weniger, als diese einzige Combination, wenn Addition und Subtraction als *die-selbe* Operation zusammengefasst werden. Sind nämlich in einer Function zwei oder mehrere (veränderliche) Grössen getrennt oder miteinander verbunden gegeben, so soll der Differenzial-Calcul lehren, wie die *ganze* Zunahme oder Abnahme, *Addition* oder *Subtraction* einer Function, in welcher eine oder mehrere veränderliche Grössen durch Addition oder Subtraction vermehrt oder vermindert worden sind, im Allgemeinen gefunden, und wie insbesondere diese ganze Zunahme in eine wohlgeordnete Reihe von Gliedern zerlegt werde, die nach allgemeinen und apriorischen Regeln als *erstes*, *zweites*, *drittes* Glied u. s. w. bestimmt und *von einander* abgeleitet werden können. Diese *einzelnen*, allgemein unterscheidbaren Glieder der ganzen Zunahme geben *neue* Functionen, und in diesen neue Probleme und Auflösungen. die allerdings schon in der ganzen Zunahme enthalten, aber ungetrennt und unerkant waren. Darin liegt der Fortschritt, dass mit den getrennten einzelnen Gliedern neue und erkennbare Functionen eintreten. Die Entwicklung der Eigenschaften dieser Functionen und Glieder, und die Auseinandersetzung der Probleme, die sie hervorrufen, und deren Auflösungen sie geben, bilden den Inhalt des Differenzial-Calculs.

Wir vermehren oder vermindern im Differenzial-Calcul die veränderlichen Grössen um eine beliebige Grösse und suchen daraus die ganze Zunahme oder Abnahme einer Function in einer wohlgeordneten Reihe einzelner Glieder darzustellen. Diess ist aber gerade die wesentlich erste Operation, die wir mit Grössen vornehmen können. Wollten wir auf diejenigen Lehren verzichten, die uns erkennen lassen, wie die Zunahme oder Abnahme der Functionen aus ihnen selbst, oder wie die Functionen aus ihren Zunahmen oder Abnahmen bestimmt werden, und wie sie andere Functionen mitbestimmen, so würden wir den vornehmsten Theil mathematischer Wissenschaft ausser Acht

lassen, und nur auf ein sehr kleines Gebiet von Operationen beschränkt bleiben, auf blossе Vorarbeiten, die das Innere der Wissenschaft noch gar nicht berühren. Denn es ist mit Leichtigkeit vorauszusehen, dass Grössen mit ihren eigenen Veränderungen in einem ganz andern wichtigen und genuinen Zusammenhange stehen werden, als bloss mit andern fremden Grössen, und dass die Lehren dieses Zusammenhangs viel wichtigere Probleme und Auflösungen geben werden, als die ersten Gebiete der blossen Vorarbeiten. Weit entfernt, dass der Differenzial-Calcul ein bloss künstlicher Zusatz zu den Elementen der Analysis sei, ist er gerade einer der wesentlichsten Theile dieser Elemente. Von unendlich kleinen Grössen ist aber darin ganz und gar nicht die Rede.

An den Differenzial-Calcul schliesst sich dann, wie an die Addition die Subtraction, an die Multiplication die Division u. s. w. unmittelbar der *Integral-Calcul* an. Er lehrt aus der gegebenen Zunahme oder Abnahme einer Function oder aus einzelnen Gliedern derselben die ursprüngliche Function herstellen, mögen nun die veränderlichen Grössen in ihren Zunahmen oder Differenzialien getrennt, oder in Gleichungen verbunden, gegeben sein.

Endlich können auch diejenigen Probleme, die aus der *ganzen* Zunahme oder Abnahme einer Function unabhängig von der Trennung in einzelne Glieder hervorgehen, untersucht werden. Sie werden den *Differenzen-Calcul* geben, der zwar noch wenig ausgebildet, aber doch in so weit bestimmt ist, dass er als wesentlich verschieden vom Differenzial-Calcul erklärt werden muss, daher auch die Auflösungen seiner Aufgaben nicht dem Differenzial-Calcul, sondern dem eigenen Algorithmus der Differenzen-Rechnungen anheimfallen.

Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, den ganzen möglichen Inhalt der Analysis auseinander zu setzen. Aber bemerkt muss werden, dass der Differenzial-Calcul *aus der einzigen Combination der Addition mit den Functionen entspringe*,

und dass, gerade so wie die Addition, auch die Multiplication, die Potenzirung, oder die Logarithmirung u. s. w. mit den Functionen combinirt werden könne. Jedenfalls kann diess nicht dem Zufalle überlassen werden, es muss untersucht und bestimmt werden, ob hier Resultate gefunden werden können oder nicht.

Ist nämlich der Differenzial - Calcul in den Symbolen enthalten: $f(x, y, z \dots) = 0$, $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z \dots) = 0$, $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x, z + \Delta z \dots)$; $dy = \varphi'(x + \Delta x, z + \Delta z \dots) - y$, u. s. w., wo $f(x, y, z \dots) = 0$ eine gegebene Function, und die anderen Symbole die Ableitungen aus ihr andeuten, so können, wenn z. B. die Function $y = f(x, z \dots)$ gegeben ist, wenn sie mit der Multiplication combinirt wird, die Function $y \omega = f(x \xi, z \zeta \dots)$, und daraus ω oder einzelne Glieder von ω gesucht werden; oder wenn sie mit der Potenzirung combinirt wird, so können aus der Function $y = f(x, z \dots)$ die Function $y^\psi = f(x, z^\psi \dots)$, und ψ oder Functionen von ψ gesucht werden. — Und eben so werden der Ordnung nach neue Probleme aus neuen Combinationen hervor gehen müssen.

Man kann also durch Anwendung der [combinatorischen Methode neue Gebiete der Analysis definiren, in denen zwar noch nichts geleistet ist, wobei es aber doch von nothwendigen Untersuchungen abhängen wird, ob in ihnen etwas geleistet werden könne oder nicht. Und auch das würde lehrreich sein, wenn bewiesen würde, dass in ihnen nichts geleistet, und warum in ihnen nichts geleistet werden könne; aber lehrreicher würden immerhin die Resultate selbst sein, die in ihnen erhoben werden könnten. — So ist nichts dem Zufalle überlassen; es wird aufs deutlichste eingesehen, dass nur dieses und nichts anderes angereicht werden könne. Dadurch ist die Einheit, Ganzheit und Vollendung des Systems hergestellt.

So webt sich das Kleid der Wissenschaft in Abstraction und Combination. Vereinigt geben sie die Methode der In-

duction, die nur in sofern als eine verschiedene Methode erklärt werden könnte, als man der Abstraction und Combination das Geschäft, das Material zu neuen Sätzen herbeizuschaffen, und der vollendenden Induction das Geschäft, diess Material in allgemeine Lehrsätze umzuprägen, zusprechen wollte, in der Art, dass z. B. die *Abstraction* das Material gäbe: Multiplirte Grössen geben eine neue Grösse, und dass die *Induction* den Satz gäbe: Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches; oder dass die *Combination* das Material gäbe: $(a + b)m = ?$, und dass die *Induction* den Satz gäbe: $(a + b)m = am + bm$. In der Wirklichkeit sind aber diese beiden Momente jederzeit vereinigt.

Aus Allem wird einleuchtend, dass man es nur mit Verwunderung vernehmen könne, wenn behauptet wird, dass die Induction nur in *empirischen* Wissenschaften, nicht aber in *Vernunft-Wissenschaften*, wie die Mathematik ist, statt finden könne. Sie findet in der Mathematik wesentlich statt, ja sie ist ein grosser Theil ihrer selbst. Freilich wird man sie nicht finden, wenn man sie nicht da sucht, wo sie allein gesucht und gefunden werden kann. Die Entdeckung der Sätze hat man dem *Zufalle* überlassen, und man hat nur die *Beweise* untersucht. In diesen hat man sie allerdings nicht gefunden. Als Beweisart kann die *Induction* heruntergesetzt werden, das trifft sie gar nicht, der Tadel springt zurück; denn sie will nicht Wahrheiten *beweisen*, sondern sie will Wahrheiten *finden* lehren.

Die Induction als die Kunst des Suchens und Findens ist von *Baco von Verulam* in die Wissenschaft eingeführt worden, und er konnte mit Recht sagen, dass vor ihm niemals ernsthaft an die Induction gedacht worden sei. Sie war wie durch einen Schleier vor den Augen der Menschen verdeckt, und wurde offenbar, allgemein, überraschend und erfolgreich, als die Hand gekommen war, die diesen Schleier wegzog. Dass sie aber fortan nicht als blosses *Moment* der Methode, son-

dern als die *ganze* Methode behauptet wurde, diess musste ihre Wirksamkeit beengen. Sie konnte lange nicht die Fortschritte hervorrufen, die sie als ein wohlverstandener wichtiger Theil der Wissenschaft hätte hervorrufen können. Denn nichts Einseitiges, wenn es als Ganzes genommen wird, wird wahrhaft wohlthätig und allgemein wirken können.

Die Induction ist in der Methode des Findens dasselbe, was die directen Beweise, die *Substitutionen*, in der Methode der Beweise sind. Dem indirecten Beweise wird dann die *Analogie* entsprechen; und so wie die durch Induction gefundenen Sätze direct bewiesen werden können, so werden die durch Analogie gefundenen Sätze nur indirect bewiesen werden können. So wie in indirecten Beweisen Alles nicht aus vorhergehenden Sätzen entfaltet, sondern synthetisch *nur dem Axiome gemäss* bewiesen wird, in der Art, dass das Axiom und mit ihm die vorhergehenden Sätze nicht gelten könnten, wenn nicht auch dieser neue Satz gelten würde, so können auch die durch Analogie gefundenen Sätze nicht aus früheren abgeleitet, sondern sie müssen frei und selbstständig aufgestellt werden. — Die Wurzeln der Analogie sind Reduction auf das Allgemeine, und Reflexion; sie sind das, was Abstraction und Combination für die Induction sind.

Die Reduction ist Zurückführung auf die Allgemeinheit des Axioms. Sie kann auch die *Generalisirung* der Lehrsätze genannt werden. Die neuen Sätze werden so aufgestellt, dass sie dem Axiome gemäss, und so allgemein seien, wie dieses selber ist. Die Herstellung der Allgemeinheit ist das wesentlichste Geschäft der Reduction. Z. B. Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches, allgemein, nicht bloss in ganzen Zahlen. Dass es in ganzen Zahlen gelte, kann aus der Induction in directen Beweisen dargethan werden; dass es aber allgemein gelte, welche Operationen auch durch die Factoren ausgedrückt sein mögen, diess kann keine Induction aussprechen und kein directer Beweis zeigen. Dieses schlechthin Allgemeine wird

durch Analogie ausgesprochen und im indirecten Beweise bewiesen.

Es scheint nicht schwer zu sein, Sätze durch Reduction aufzustellen; schwerer scheint es aber zu sein, diese Sätze zu beweisen. Da die Reduction keine Wurzel vor sich, in andern Sätzen, hat, sondern selbstständig ist, so können die Beweise ihrer Lehren nicht auf andere Sätze zurückgebracht werden, sie müssen contradictorisch sein. Es muss in ihnen gezeigt werden, dass die neuen Sätze dem Axiome gemäss seien; damit diess aber gezeigt werden könne, müssen sie auch dem Axiome gemäss aufgestellt werden. Würde diess übersehen, oder übertreten, so könnte es allerdings nachträglich durch keinen Beweis wieder hergestellt werden. Was nicht in einem Satze ist, kann nicht als in ihm enthalten bewiesen werden.

So frei und selbstbestimmend auch die Reduction verfahren kann, so ist sie doch an bestimmte Gesetze gebunden, die sie nicht übertreten darf.

1) Sie muss nur solche Begriffe verbinden, die zu einer und derselben Wissenschaft gehören.

2) Sie muss sie auf dieselbe Art verbinden, wie sie im Axiome dieser Wissenschaft verbunden sind.

3) Sie muss sie in Operationen verbinden, von denen man schon weiss, dass sie überhaupt Operationen dieser Wissenschaft seien.

Es können daher z. B. in der Mathematik nur Grössen mit Grössen, nicht Grössen mit Qualitäten verbunden werden. Würde diess dennoch geschehen, so könnten diese Verbindungen nicht mathematisch untersucht werden. Ferner müssen die Grössen so verbunden werden, wie Grössen im Axiome überhaupt verbunden werden können, allgemein und gegenseitig. Würde z. B. im Axiome nicht allgemein gelten, dass alles Gleiche zu allem Gleichen addirt Gleiches gebe, so könnte auch nicht der Satz in der Mathematik gelten: dass alles Gleiche mit Gleichem multiplicirt Gleiches gebe, und eine Reduction oder Analogie,

die diesen Satz einführt, wäre falsch und unrichtig, weil ein solcher Satz niemals bewiesen werden könnte. Es kann z. B. nicht gelten, dass alles Gleiche mit Gleichem multiplicirt *Ungleiches* gebe, weil diess schon den früheren aus dem Axiome abgeleiteten Sätzen widersprechen würde. Wer so in Analogieen verfahren wollte, würde das Aufgestellte nimmermehr beweisen können. Endlich müssen die Operationen, z. B. die Multiplicationen, *schon als Operationen dieser Wissenschaft bekannt* sein, ehe sie durch Analogie als *allgemein* gültig aufgestellt werden können. Sie müssen wenigstens im Einzelnen gültig sein, und ihre Allgemeinheit soll erst hergestellt werden. Sie werden aber durch die vorhergehende Abstraction als im Einzelnen gültige Operationen nachgewiesen. Nur wenn dieses der Fall ist, dann wird für die contradictorischen Beweise der Spielraum gewonnen, in welchem die Fäden geknüpft werden, die diese Sätze zwar nicht aus den vorhergehenden Sätzen entfalten, aber sie doch in nothwendigen Zusammenhang mit ihnen bringen. — Diess sind alle Gesetze, die bei der Anwendung der Generalisirung der Lehrsätze beobachtet werden müssen; sie sind leicht, und wenn man sie kennen gelernt und durchdrungen hat, kann man sie wohl nicht übertreten; wenn man aber ihres Wesens nicht achtet, so werden sie leicht übersehen. Dann muss es freilich kommen, dass die Schlüsse aus der Analogie so gering geschätzt werden, wie diess allenthalben der Fall ist. Einmal nimmt man sie als *Beweise*, was sie nicht sind, denn sie sollen bloss die Lehrsätze aufstellen, nicht aber beweisen. Dann verfährt man auch mit der Analogie auf eine Weise, als ob jede Willkühr Verstand, und jede Wahrheit vogelfrei wäre. Diess ist Analogie, sagt man, wenn z. B. geschlossen wird: die Erde hat Bewohner, der Mond ist eine Erde, also hat der Mond Bewohner. — Diess ist keine Analogie nach Gesetzen, und was sie sonst sei, kann uns gleichgültig sein; denn *hier* ist das dritte Gesetz übertreten worden, dass die Operationen, in denen man die Begriffe verbindet, schon als in einzelnen Fällen

gültige Operationen erkannt seien. Die Verbindung des Satzes nämlich: der Mond ist eine Erde, ist nicht einmal in einzelnen Fällen gültig. Es ist nicht einmal von *einem* Himmelskörper durch *Induction* nachgewiesen worden, dass er mit der Erde in Bezug auf Bewohnbarkeit übereinstimme, geschweige von mehreren; (man weiss im Gegentheile vom *Monde* gewiss, dass er keine athembare Atmosphäre habe). Der Weg der Induction ist hier noch gar nicht betreten worden; was also nicht einmal von einem oder mehreren gilt, das kann unmöglich von ferneren Gegenständen ausgesagt werden. Es ist aus der Luft gegriffen, wie ähnliche Analogien einer bekannten Philosophie.

Man hat sich auch Mühe gegeben, den Meister Aristoteles in diesen Schlingen zu fangen, aber vergeblich. Wenn er z. B. sagt: der Krieg der Athener mit den Thebanern ist ein Uebel, denn der Krieg der Thebaner mit den Phocäern war ein Uebel — so sagt man, dass diess Analogie sei. Aber Aristoteles sagt: es ist ein *Beispiel*, es ist Exemplification, und diese soll nur das bereits bewiesene oder anderweitig zu beweisende Allgemeine *erläutern*, und dem Verständnisse nahe bringen, nicht selbst beweisen. So sind z. B. in den vorliegenden Untersuchungen alle Sätze über die Vernunft-Wissenschaften durch *mathematische* Beispiele erläutert worden, nachdem sie allgemein bewiesen worden waren; die Beispiele sollten sie dem Verständnisse nahe bringen, nicht erst beweisen. So soll das Beispiel: der Krieg der Thebaner mit den Phocäern war ein Uebel, den allgemeinen Satz deutlich machen: Alle Kriege der Hellenen unter sich sind ein Uebel, also ist auch der Krieg der Athener mit den Thebanern ein Uebel. — Exemplification und Generalisirung (oder Analogie) sind wesentlich verschieden. Exemplification setzt das Allgemeine als bekannt und bewiesen voraus, und will es nur erläutern; aber die Generalisirung will das Allgemeine erst aufstellen, damit es durch Contradiction bewiesen werde. —

Die andere Wurzel der Analogie ist die *Reflexion*. Sie

ist zunächst die *Umwendung einer Operation in ihre sie ergänzende Operation*, z. B. der Addition in die Subtraction; und dann ist sie allgemein die *Zusammenfassung beider Operationen in eine einzige*. Wie jede einfache Bejahung durch ihre einfache Verneinung aufgelöst wird, so ist auch jeder Zusammensetzung eine sie auflösende Trennung entgegengesetzt, und es muss aus der Verbindung beider nur wieder das ursprünglich Gegebene hervorgehen. Ist daher z. B. die Operation der Addition gebildet, dass a mit b verbunden eine dritte Grösse c gebe, so ist mit der Verbindung $(a + b)$ auch jedes einzelne verbundene Element gegeben. Wie wird nun a aus $(a + b)$ gefunden? Die Grösse a sei das Ursprüngliche, die Grösse b das durch Addition Verbundene. Wird diese Verbindung aufgehoben, so ist nur wieder das Ursprüngliche, a , vorhanden. So wurzelt die Reflexion in dem Satze des Widerspruchs. Es ist aber nicht sowohl die Aufgabe gegeben, die Grösse a aus $(a + b)$ herzustellen, sondern vielmehr sie aus c , aus dem Ganzen, zu finden. Diess giebt die neue, der Addition entgegengesetzte Operation, die Subtraction, die entweder wirklich ausgeführt wird, indem man b von $a + b$ wegnimmt, oder die als Operation nur angedeutet wird, wenn sie nicht unmittelbar ausgeführt werden kann; so dass die beiden Gleichungen hervorgehen: $(a + b) - b = a$ und $a = c - b$. In der letzteren Gleichung ist die Operation durch das Zeichen $(-)$ angedeutet. — Auf gleiche Weise wird der Multiplication die Division, der Potenzirung die Radizirung u. s. w. entgegengesetzt. Sie werden als die sich gegenseitig auflösenden Operationen definirt; z. B. eine Grösse m durch a dividiren heisst, eine neue Grösse finden, die durch a multiplicirt, wieder m giebt.

Nun beginnt das zweite Geschäft, durch welches die zusammengehörigen und sich gegenseitig ergänzenden und auflösenden Operationen, als eine einzige Operation hergestellt werden. Diess geschieht dadurch, dass gezeigt wird, dass für beide Opera-

tionen die nämlichen Regeln und Gesetze gelten, dass in ihnen auf ganz gleiche Art verfahren werde, es mögen die gegebenen Ausdrücke durch die erste oder zweite Operation zusammengesetzt sein. So werden Addition und Subtraction in die Operation der additiven Urfunctionen zusammengefasst, weil auf gleiche Art mit addirten wie mit subtrahirten Grössen verfahren wird, sowohl bei der Addition wie bei der Subtraction. Bei der Addition werden die Zeichen beibehalten, bei der Subtraction werden sie verändert, sie mögen positive oder negative Operationen ausdrücken. — So werden Multiplication und Division in eine einzige Operation zusammengefasst. Z. B. die Division durch m ist eine Multiplication durch $\frac{1}{m}$. Dasselbe gilt von Potenzen und Wurzeln u. s. w. Und zwar werden die zusammengefassten Operationen immer nach der ersten Operation benannt, z. B. potenzielle Urfunctionen, die sowohl die Potenzirungen als die Radizirungen enthalten.

Diess erleichtert die wissenschaftliche Uebersicht, macht eine gedrängtere Darstellung der Gesetze möglich, und giebt volle Sicherheit in allen Operationen. Denn die Operationen sind gültig, die Grössen mögen als verbunden oder als wieder aufgelöst betrachtet werden. Wenn freilich am Anfange eines Problems schon Alles klar wäre, dann könnte es nicht schwer sein, alles Einzelne zu untersuchen und zu bestätigen; aber es ist am Anfange nicht Alles gegeben, es soll erst gesucht und gefunden werden. Man weiss am Anfange eines Problems nicht immer, ob addirt oder subtrahirt werden soll. Und so könnte denn die Operation gar nicht begonnen werden, da sie anfangs nicht gewusst wird.

Wenn z. B. gefragt wird, wie viel Jemand gewonnen habe, wenn er zuerst 20 Gulden gewonnen, und dann 10 Gulden verloren hat, so ist die Auflösung leicht. Sein wahrer Gewinn ist die Differenz seines Gewinnes und Verlustes, also $g = 20 - 10 = 10$. — Wird gefragt, wie viel Jemand verloren

habe, der 10 Gulden gewonnen, und dann 20 Gulden verloren hat, so ist die Auflösung leicht. Der wahre Verlust ist die Differenz des Verlustes und Gewinnes, $v = 20 - 10 = 10$. — Allein wenn allgemein gefragt wird, wie viel Jemand gewonnen oder verloren habe, der a gewonnen und b verloren hat, so weiss man nicht, ob a oder b grösser sei; ob nach Gewinn oder nach Verlust gefragt werden soll. Man müsste daher die beiden Formeln bilden: $g = a - b$; $v = b - a$; und man würde am Anfange nicht absehen können, welche Formel die gültige sein werde. — Aber kann man denn nicht jedesmal zwei Formeln bilden? wird man vielleicht fragen. Diess ist wohl erlaubt. Wenn jedoch die Probleme zusammengesetzt sind, wenn viele verschiedene Operationen vorkommen, von denen man nicht voraussieht, ob sie die setzenden oder auflösenden sein werden, dann ist es mit zwei Formeln nicht abgethan; man würde nach der Lehre der Combinationen sehr viele Formeln construiren müssen. Es ist daher das Vorzüglichste, dass die beiden Operationen in eine einzige zusammengefasst, und dass im obigen Falle z.B.: $g = a - b$ gesetzt werde. Findet man später, dass b grösser als a ist, und dass $b - a = c$ ist, so setzt man $g = -c$, und diess ist eine Operation, die nur angedeutet, aber nicht ausgeführt werden kann, also im strengen Sinne eine unmögliche Operation. Sie zeigt an, dass man anders hätte fragen, dass man die Formel $v = b - a = c$ hätte gebrauchen sollen. Statt die ganze Untersuchung aufs Neue zu machen, ändert man, wenn man auf eine unmögliche Operation kommt, bloss die Frage, setzt z. B. Verlust statt Gewinn, $(+)$ statt $(-)$ und hat dasselbe Resultat, als ob man die ganze Untersuchung auf die rechte Art aufs Neue begonnen und durchgeführt haben würde.

So corrigiren sich die richtig bestimmten und bezeichneten Operationen von selbst, und wo sie als unausführbare Operationen erscheinen, zeigen sie, dass die Frage Unmögliches verlangt, und geben auch dadurch eine wahre Einsicht. Jede Wissenschaft, die es bis zu dem Punkte bringt, dass sie allgemeine

Fragen auch allgemein auflösen könne, wird in ihren Resultaten auch unmögliche, unausführbare Operationen zeigen müssen. Denn wenn nach Unmöglichem gefragt wird, (und jede *allgemeine* Frage schliesst sowohl Mögliches als Unmögliches ein), so wird die Auflösung der Frage auch nichts Anderes als Unmögliches geben können. Diess wären merkwürdige Wissenschaften, die auf alle Fragen, sie mögen nun Mögliches oder Unmögliches verlangen, lauter mögliche Antworten und Auflösungen geben könnten.

Man kann sich allen mathematischen Operationen, sie mögen am Anfange eines Problems als setzende oder als auflösende Operationen genommen werden, mit aller Sicherheit überlassen, weil die Uebereinstimmung der zwei sich jedesmal ergänzenden Operationen bekannt und bewiesen ist. Diese Sicherheit ist eine ausserordentliche Erleichterung alles mathematischen und wissenschaftlichen Denkens. — Alle Zeichen bezeichnen übrigens niemals die Grössen, sondern die Operationen. Findet man z. B. $g = -c$, so ist $(-c)$ nicht eine wesentlich negative Grösse (Verlust), sondern eine nicht weiter auszuführende Operation. Die Frage war unrichtig gestellt worden; hätte man nach Verlust gefragt, so würde $v = c$, also Verlust als positive Grösse erschienen sein. Jede zweite (auflösende) Operation ist in diesem Falle eine *unmögliche*, nicht auszuführende Operation, die aber durch Verbindung mit andern Operationen möglich und ausführbar werden kann, wie auch $\sqrt{-a^2}$ durch multiplicative Verbindung mit $\sqrt{-b^2}$ die ausgeführte Operation $\pm ab$ giebt. Diess ist ein wesentlicher Punkt, den die Analysis zu erörtern hat.

Die Gesetze der Reflexion sind ganz und gar den Gesetzen der Reduction entsprechend. Es können nur Begriffe verbunden werden, die zu einer und derselben Wissenschaft gehören, und es muss die auflösende Operation der ihr vorhergehenden entsprechen; es kann nur so getrennt werden, wie überhaupt verbunden worden ist, Addition durch Subtraction, Multiplication

durch Division u. s. w. Würde dieser Zusammenhang nicht statt finden, so würden weder beide Operationen in eine einzige vereinigt, noch würden die Anhaltspunkte für die nachfolgenden contradictorischen Beweise festgestellt werden können. — Dass aber die durch Reflexion gefundenen Sätze nur indirect bewiesen werden können, ist einleuchtend, da sie nicht in vorhergehenden Sätzen enthalten sind, sondern selbstständig und als neue Sätze zu ihnen hinzukommen. Gewöhnlich werden sie zwar durch Identität bewiesen; es ist aber schon gezeigt worden, dass diese Beweise nichts anderes als abgekürzte indirecte Beweise seien. Schon der Name der Reflexion zeigt an, dass bei allen diesen Sätzen nicht im Stoffe, sondern im Denken die wahren Angelpunkte der Beweise liegen, es ist die Festhaltung des ursprünglichen Gedankens der Wissenschaft, die stete Vergegenwärtigung dessen, was man gedacht habe, indem man diese Wissenschaft gedacht und begonnen hat. Diesem Gedanken gemäss wird fortgefahren, und wahre Synthesis geschaffen. Es ist auch niemals der Stoff, der statt unser die Herstellung der Wissenschaft übernehmen kann.

Diese beiden Operationen, Reduction und Reflexion, bilden das Ganze der Analogie. Die Analogie selbst kann höchstens dadurch als für sich bestehend unterschieden werden, dass man der Reduction und Reflexion die Aufgabe zuschreibt, den *Stoff* der neuen Lehrsätze herbeizuschaffen, welche dann die Analogie in der *Form* von Lehrsätzen aufstellt, z. B. Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt allgemein Gleiches: Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt allgemein Gleiches u. s. w. In der Wirklichkeit der Methode sind aber immer alle Momente verbunden, sie können nur im Denken unterschieden und auseinander gehalten werden.

Und so wirken alle Gesetze des Denkens zur Wissenschaft zusammen, Induction mit den directen Beweisen, Analogie mit den indirecten Beweisen. Es kann schwer scheinen, die Beweise aller Sätze im Gedächtnisse zu behalten. Aber wenn man

weiss, wie die Sätze wesentlich gebildet worden seien, ob durch Induction oder durch Analogie, so hat man auch die Elemente und Anhaltspunkte dieser Beweise; alles unterstützt sich gegenseitig zur Leichtigkeit und Schönheit der Wissenschaft. Die Sätze werden bewiesen, wie sie gebildet worden sind; die durch Induction gebildeten Sätze werden direct, die durch Analogie gebildeten Sätze werden indirect bewiesen. Nur wenn man die Wissenschaft in diesen Gesetzen hat, hat man sie auf die rechte Weise.

Der Bau der Wissenschaft ist aber nicht in der Art geordnet, dass jetzt etwa bloss Analogie, und dann nicht wieder eintrete, und dass dann später bloss Induction, und dann nicht wieder eintrete: sondern beide verbinden sich miteinander, und ergänzen sich gegenseitig *nach der Ordnung der Beweise*. Man kann nicht sagen: Hier ist allein Induction mit directen Beweisen, und dort allein Analogie mit indirecten Beweisen, sie verweben sich in den zartesten Linien, und treten fast mit einander auf; denn das Schnellste ist der Gedanke; aber sie sind immer unterscheidbar und erkennbar.

Als Beweisart ist die Analogie nicht geachtet. Diess trifft sie aber nicht. Sie ist in Beweisen nicht nur nicht wichtig, sondern überhaupt nicht gültig; ihr Gewicht erhält sie erst, wenn man an die *Methode des Findens* denkt; nur wenn man die Analogie da sucht, wo sie ist, wird sie wirksam und trefflich sein können. — Methodisch bedeutsam ist die Analogie erst durch *David Hume* gemacht worden, aber nicht um erhoben, sondern um aus der Wissenschaft ausgetilgt zu werden.

Diess Bestreben hatte in der Meinung, dass die Analogie eine Beweisart sei, seine kecken und starken Wurzeln. Allein die Analogie ist dennoch geblieben, und was immer Wichtiges geleistet worden ist, von Allem war sie die innere, unvertilgbare, unerkannte Macht. Analogieen sind die *Kant'schen* Anschauungen und Begriffe a priori, obwohl sie nicht als solche ausgesprochen wurden. — Jetzt erst wurde man

recht aufmerksam darauf, dass man die meisten Sätze in blossen Analogieen, also *unbewiesen* hatte, die man dogmatisch bewiesen zu haben glaubte. In rechter Methode hätte man allerdings zu den indirecten Beweisen voranschreiten sollen, allein statt dessen schritt man zurück, um die Analogie zu vertilgen, und das schöne Resultat nachzuweisen, dass nichts wahrhaft wissenschaftlich erkannt werden könne. Es ist aber anders gekommen, als erwartet worden war; die Wissenschaft war nicht mehr einzudämmen. — *David Hume* liess die *Mathematik* als eine allgemeine Wissenschaft gelten, aus dem Grunde, weil sie keine blossen Analogieen, sondern nothwendige Beweise habe; es ist aber gezeigt worden, dass gerade die Analogie einer der grössten und wichtigsten Theile der mathematischen Methode sei, wenn Methode im allgemeinen Sinne genommen wird, nicht bloss als die Methode, die Wahrheiten zu beweisen, sondern auch als die Methode, die Wahrheiten zu finden.

In allen Wissenschaften ist ein zweifacher Zustand zu unterscheiden, je nachdem ihre Axiome schon gefunden sind, oder aber erst gefunden werden sollen. Sind die Axiome schon gefunden, so werden sie entfaltet und in fortschreitender Ordnung bereichert, die Probleme werden nicht erwartet, sondern aufgesucht. Hier ist die Analogie wirksam. Sind aber die Axiome noch nicht gefunden, dann ist das Moment der Analogie zwar vorhanden, aber noch verborgen; es ist gut, dass es an's Licht gebracht werde. — Was nämlich im ersteren, vollkommenen Zustande der Wissenschaft, in der fortschreitenden Methode vom Axiome aus, die Analogie giebt, das giebt in dem zweiten, seine Vollkommenheit erst erwartenden Zustande der Wissenschaft die Erfahrung oder der Zufall; es finden sich einzelne Sätze oder Wahrnehmungen, die erst durch Substitution oder Contradiction geprüft werden müssen. Dass aber alle Wahrnehmungen und Erfahrungen durch Analogie gemacht und angenommen werden, ist wahr und gewiss, auch wenn nicht daran gedacht wird. Die einzelnen Wissenschaften helfen sich dann

mit Surrogaten von Axiomen. Irgend ein Surrogat muss da sein, wo die Wissenschaft besteht, irgend eine bestimmte Verbindung des Denkens muss gegeben sein, wenn auch diese Verbindung der Erfahrung oder dem Gegenstande selbst, oder dem guten Glücke zugeschrieben wird. Jede Wissenschaft hat entweder ihre offenbaren oder ihre noch verborgenen und enthüllbaren Axiome.

Mächtig wirkt aber die Analogie nur im fortschreitenden Prozesse der Wissenschaft vom Axiome aus; da tritt die Synthesis der Analogie statt der Synthesis der Erfahrung ein. Wenn hier die Erfahrung durch Analogie ersetzt (vielmehr *voraus* gesetzt wird) so geschieht diess nicht *gegen* die Erfahrung, sondern *für sie*; denn jeder durch Analogie aufgestellte und durch Contradiction bewiesene Satz könnte auch erfahren werden, wenn die Erfahrung so vollkommen sein könnte, wie die Wissenschaft ist oder sein kann.

So ist die Analogie die grösste Wohlthat und das grösste Hilfsmittel wahrer Erfahrung und Wissenschaft, indem sie uns Alles giebt, was uns die allerbeste, die göttlich geordnete Erfahrung nur immer geben könnte, und darüber hinaus noch die Einsicht in die Allgemeinheit und Nothwendigkeit der erkannten Wahrheiten, was uns keine Erfahrung geben kann. Schon diess ist ein hoher Vorzug, wenn Probleme (Erfahrungen) systematisch gesucht und gefunden werden können. Diess muss unvergleichlich schneller zu einem sicheren Ziele führen, als die Erwartung des günstigen Augenblickes, oder des Zufalls. Wer kann dem Zufalle gebieten, so oder so zu erscheinen, und in dieser oder jener Zeit einzutreten? Wer wird vom Zufalle erwarten wollen, was er wissenschaftlich finden kann, und zwar erkennbar und geordnet, während es der Zufall nur ungeordnet und unerklärt liefern könnte? Forschen ist die Quelle der Wissenschaft, alles Forschen aber ist ein Suchen, dass man den Punkt finde, der das Unerklärte erklären möchte.

Das Verfahren, die Sätze aufzufinden, ist eben so sehr ein

Zweig der wahren Methode, wie das Verfahren, sie zu beweisen. Es sind daher Substitution, Contradiction, Induction, Analogie gleich wichtige Momente jeder wissenschaftlichen Methode. In der Philosophie wird eine *halbe* Substitution (der Syllogismus), aufs Höchste geachtet; in den wirklichen Wissenschaften ist es aber die *Induction*, die den vornehmsten Platz einnimmt, die als wahre Methode zur Erforschung der *Wahrheit* gepriesen wird. Und sie verdient es, dass sie geachtet werde. Aber jedes Moment der Methode ist so wichtig, wie jedes andere, und wir werden diese Lobpreisungen etwas herabstimmen müssen, damit das Gleichgewicht wieder hergestellt werde. „Induction ist die vorzüglichste Methode zur Erforschung der Wahrheit.“ Sie sei es auch im vollen Maasse. Was ist aber die Analogie? Die Induction kann doch bloss relative Generalisirung der gefundenen Resultate geben; sie zeigt das Gleichartige und Gesetzmässige in *Vielem*, niemals aber in *Allem*; sie giebt kein wahrhaft *allgemeines* Gesetz. Oder ist sie etwa auch die Kunst, wie man den Sprung von *Vielem* zu *Allem* mit leichtem Gewissen machen könne? Was wird aber in diesem Uebergange von *Vielem* zu *Allem* gedacht, was ist dasjenige, das dadurch im Denken hergestellt wird? Verdient dieses nicht auch, dass es untersucht werde? Was kann denn Erfolgreiches hervorgehen, wenn man sich darüber absichtlich eine Täuschung machen will? Wird es aber untersucht, was kann Anderes gefunden werden, als dass es die Analogie allein sei, die diesen Uebergang von *Vielem* zu *Allem* möglich macht, und erläutert? Wir erschrecken bei dem Worte Analogie. Etwa weil die Analogie eines nachfolgenden Beweises bedarf, wenn sie gelten soll, und weil sie als solche schon auf einen Beweis hinweist? Diess möchte gerade ihr Gutes sein. Warum erschrecken wir bei einem Worte, und nicht vielmehr bei der Sache selbst, bei dem Uebergange von *Vielem* zu *Allem*, der in der Induction ganz blindlings gemacht wird? Wir dürfen diesen Schritt nur in's

Auge fassen, wir dürfen nur untersuchen, was durch ihn wirklich ausgeführt wird, und wir werden im Stande sein, die *Gesetze* des Uebergangs zum Allgemeinen eben so sicher aufzustellen, wie die Gesetze der Induction. Die Analogie ist sogar wichtiger, als die Induction, da sie der *Prüfstein* der Induction ist. Hält eine Induction die Prüfung der Analogie nicht aus, so wird sie wohl höchst wahrscheinlich falsch sein, wie es in der That viele solcher falschen Inductionen giebt, die ohne Prüfung für wahr gehalten werden. Hält sie aber diese Prüfung durch Analogie aus, so wird sie ganz gewiss wahr und richtig sein müssen. Die Analogie fordert also zu einem weiteren, zu einem vollendenden Forschen auf. Und jedes Verfahren ist gut, das zur Forschung führt.

Wenn aber auch Induction und Analogie auf die rechte Art angewendet werden, so geben sie doch nur das Material zu *möglichen* Wahrheiten und nicht mehr. Die wirkliche, erkannte Wahrheit ist erst eine Folge der *Beweise*. Bleiben die Wissenschaften bei der Induction oder Analogie stehen, so erklären sie stillschweigend, dass sie auf die Wahrheit im strengen Sinne verzichten werden. Diess kann aber keine ernstlich gemeinte Erklärung einer Wissenschaft sein; also werden sie zu den Beweisen übergehen müssen. Wenn die wirklichen Wissenschaften von der Induction und Analogie allgemein zu den Beweisen vorangehen werden, dann wird es viel weniger *wichtige* Streitigkeiten geben, so wie es viel weniger *nichtige* Streitigkeiten geben wird, wenn die scheinbaren Wissenschaften von den Beweisen zur Induction und Analogie zurückgehen werden. Wahrheit aber allein ist das ernste Ziel aller Wissenschaften.

Zwölfte Untersuchung.

Ueber die Elementarisirung der Wissenschaften.

Wenn auch die Gesetze der Induction und der Analogie, der Substitution und der Contradiction in einzelnen Lehren auf's Beste angewendet werden, so wird doch niemals ein entscheidender und zur Vollendung führender Schritt gemacht werden können, wenn nicht zur Methode im Grossen, zur systematischen Ordnung und Elementarisirung aller Erkenntnisse einer Wissenschaft übergegangen wird.

Die Ordnung und Elementarisirung besteht zunächst darin, dass in den einzelnen Zweigen einer Wissenschaft die Wahrheiten auf's Beste gesondert und geordnet werden. Es muss Alles vereinigt werden, was zusammen gehört, Alles getrennt werden, was von einander verschieden ist. Diess wird immer nur bei einer weiter vorgeschrittenen Wissenschaft möglich sein, wo es auf das *Gold* der Erkenntniss ankömmt; denn nur, wo Reichthum vorhanden ist, kann daran gedacht werden, in Wenigem Viel zu haben. In dieser Beziehung ist selbst in der Mathematik sehr viel zu leisten übrig geblieben. So wird man, um zuerst *ein* Beispiel anzuführen, in der Geometrie nicht Theorie und Zeichnung durcheinander werfen dürfen, dass man am Ende nicht mehr wisse, was Gegenstand der Theorie, und was Gegenstand der Zeichnung sei. Die Theorie soll die Sätze

bewiesen, und in Gleichungen feststellen, sie soll zeigen, wie sie in algebraischen oder arithmetischen Operationen ausgeführt werden können. Wird z. B. die Aufgabe gestellt, dass eine gerade Linie halbart werden soll, so zeigt die Theorie, dass jede Linie, deren Maass in Zahlen gegeben ist, durch arithmetische Operationen auf's Leichteste halbart werden könne. Die Zeichnung aber zeigt, wie diese Linie mit Hilfe von gleichschenkligen Dreiecken mit hinlänglicher Genauigkeit durch *Construction* halbart werden könne. Wird es daher in einem geometrischen Beweise auf die Halbierung einer Linie ankommen, so wird die theoretische Geometrie erklären müssen: da jede Linie halbart werden kann, so sei z. B. c der Punkt, in welchem diese gerade Linie ab halbart wird. Sie braucht nicht zu zeigen, wie dieser Punkt c durch *Construction* wirklich gefunden werden könne. Würde sie diess zeigen wollen, so würde sie aus der Zeichensprache der Analysis in die Zeichensprache der descriptiven Geometrie übergehen; sie würde im barbarischen Gebrauche ganz verschiedene Zeichen und Sprachen durcheinander mengen. Die Ausführung durch *Construction* ist Aufgabe der zeichnenden, nicht aber der theoretischen Geometrie.

Es giebt daher zwei parallele Geometrieen, die theoretische und die zeichnende Geometrie; jede bedient sich der geometrischen Figuren, aber jede hat in diesen Figuren eine eigene Zeichensprache; die eine hat die analytische und arithmetische, die andere aber die constructive Zeichensprache. Denn die *Construction* ist nichts weiters, als eine besondere Zeichensprache, die mehr auf die Darstellung, als auf die Symbolisirung des Gegenstandes gerichtet ist. Beide haben ihr Gutes, und beide geben Sicherheit der Erkenntniss; nur muss die eine von der andern getrennt werden. Die theoretische Geometrie muss vorausgehen und die zeichnende muss nachfolgen, denn sie bedarf grossentheils der Beweise der theoretischen Geometrie. Man wird nimmermehr mitten in der Theorie, wie es z. B. in

den Elementen *Euklid's* geschieht, Aufgaben der blossen Zeichnung stellen und behandeln können, z. B. wie die gegebenen Winkel durch wirkliche Construction in zwei oder beliebig viele Theile getheilt werden können. Diess wird der zeichnenden Geometrie überlassen, es wird höchstens zur *Erläuterung* und *Exemplification* gebraucht werden dürfen. Wird man aber Theorie und Zeichnung durcheinander werfen, so wird die unausbleibliche Folge sein, dass man über den Lehrsätzen die Methode selbst übersieht, und dass man die Gründe alles Fortschritts in der Geometrie nicht wahrnehmen und erkennen kann. Es wird dann scheinen, dass die Lehrsätze mehr zufällig neben einander zu stehen kommen, als dass sie durch wirkliche Methode wissenschaftlich an einander gereiht worden seien.

Die zweite Aufgabe der Elementarisirung besteht darin, dass die zusammengehörigen Sätze wirklich zusammengestellt, und nicht immerfort durch ungleichartige Sätze unterbrochen werden. So stehen z. B. die Sätze der geraden Linie und die Sätze des Kreises in Unordnung durcheinander, und unterbrechen sich gegenseitig. Andere führen noch andere Linien ein, ohne Ordnung und Absicht auf Methode. Diess wird zu nichts Erheblichem führen können. Und doch ist es bloss die Zeichnung und Construction, und nicht die Theorie, die eine solche Nebeneinanderstellung vieler Linien verlangen, damit sie bestehen können. — Es wird viel einfacher und lehrreicher sein, wenn in der theoretischen Geometrie zuerst die Lehre der geraden Linie, rein für sich selbst, mit den von ihr abhängigen Ebenen und Körpern durchgeführt, wenn dann die Geometrie des Kreises, rein für sich selbst, mit den vom Kreise abhängigen Flächen und Körpern angeschlossen, und wenn so der Reihe nach zu den Geometrien der nachfolgenden Linien übergegangen wird. Geschieht diess, so kann der Fortschritt, und der Grund des Fortschritts in den einzelnen Geometrien viel einleuchtender gemacht werden, als wenn Alles ohne Plan und Ordnung durcheinander genommen wird. Und es ist nothwendig, dass der

Grund dieses Fortschritts einleuchtend gemacht werde, denn er ist in der That noch ziemlich dunkel und verborgen.

Die dritte und wesentlichste, bisher ganz übersehene Aufgabe der Elementarisirung besteht endlich darin, dass alles wirklich Elementare und Allgemeine von dem Zusammengesetzten und Ausfüllenden einer Wissenschaft auf's Schärfste unterschieden und getrennt werde. Diess ist das angenehmste Geschäft, die Ueberschauung und Anordnung des erworbenen Reichthums. So leicht aber auch diese Vorschrift im Allgemeinen erkannt und gegeben werden kann, so schwer ist es, sie im Einzelnen überall anzuwenden und durchzuführen. Und doch muss diess geschehen, wenn der Zustand der wissenschaftlichen Vollkommenheit erreicht werden soll.

Was ist aber in jeder Wissenschaft das Elementare und Nicht-Elementare, und wie kann das Eine von dem Andern unterschieden werden? — Das Elementare ist das Allgemeine. Das Allgemeine ist aber dasjenige, was in allen nachfolgenden Untersuchungen wesentlich enthalten und für ihre Beweise unentbehrlich ist. Das Elementare hat daher sein Ziel nicht in sich, sondern im Ganzen einer Wissenschaft. Diesem Elementaren gegenüber wird alles Nicht-Elementare so beschaffen sein, dass es sein Ziel nicht im Ganzen der Wissenschaft, sondern in sich selber habe, dass es also dem Ganzen nicht wesentlich diene, sondern in sich selber einen genügenden Abschluss finde.

Es wird nicht ausreichen können, wenn man das Elementare als das Anfängliche, Leichte, Uebersichtliche, und das Nicht-Elementare als das Hohe, Schwere, Sublime bezeichnen will. Wer die ganze Theorie einer Wissenschaft versteht, der wird Alles für gleich leicht oder für gleich schwer, für gleich hoch, oder für gleich niedrig halten, und wer diese Wissenschaft erst beginnt, für den wird Alles am Anfange schwer, hoch und unzugänglich scheinen, es mag elementar oder nicht-elementar sein, am Anfange oder am Ende stehen.

Es trennt sich daher jede Wissenschaft in die zwei grossen Gebiete, in das Gebiet der *Elemente*, und in das Gebiet der *besondern Untersuchungen*. Die Elemente behandeln das Allgemeine; die besondern Untersuchungen behandeln einzelne Grössen und ihre Eigenschaften, in der Art, dass sie keine andern Operationen anwenden, und zu keinen andern Operationen führen, als zu denjenigen, die bereits in den Elementen bewiesen worden sind. Sie werden auf einzelne Gegenstände angewendet, und schaffen zusammengesetztere Ausdrücke, in denen aber nicht neue, zu den Elementen wesentlich hinzukommende, sondern nur bestimmte Zusammensetzungen elementarer Operationen enthalten sind. Denn nicht aus jeder Zusammensetzung geht auch nothwendig etwas Neues hervor.

Den *Elementen*, als den *Institutionen* der Mathematik gegenüber muss daher eine *corporelle*, alle Schätze der mathematischen Erkenntniss umfassende Wissenschaft aufgestellt werden; sonst wird kein bestimmtes Ziel und kein Ende der Mathematik abzusehen sein. Und kennt man kein Ziel einer Wissenschaft, so wird man weder die Elemente auf die rechte Art, noch auch die übrigen Erkenntnisse auf die rechte Art haben. Und die Elemente werden Alles umfassen müssen, was zu ihnen gehört, es mag leicht oder schwer scheinen; und unstreitig werden weder Differenzial-Calcul, noch Integral-Calcul von ihnen ausgeschlossen werden dürfen. Dabei ist aber auch zu hoffen, dass die Elemente, in diesem Sinne bestimmt, ein wohlgeordnetes und abgeschlossenes System allgemeiner Erkenntnisse geben werden, während die besondern Untersuchungen in's Unbestimmte vervielfältigt werden können, bis endlich ihre Summe der Höhe der umfassenden Elemente gleichkommen wird.

Diese Unterscheidung zwischen dem Elementaren und Nicht-Elementaren muss um so mehr festgehalten werden, als ohne sie keine Theorie eines ununterbrochenen Voranschreitens und eines vollendenden Abschlusses des Systems einer Wissenschaft

erwartet werden kann. Denn in dem Systeme der besondern Untersuchungen können und dürfen sich hie und da Lücken finden, es können einzelne Theile mit besonderer Vorliebe behandelt, andere Theile längere Zeit hindurch vernachlässigt worden sein, diess wird die Ordnung dieses Systems nicht wesentlich beeinträchtigen können, da jede Untersuchung gleichsam ein Ganzes für sich ist. Aber in den *Elementen* dürften sich solche Ungleichheiten nicht finden, ohne dass das Ganze darunter leiden müsste. Vereinigt man aber beide Systeme der elementaren und nicht-elementaren Erkenntnisse in ein einziges ununterschiedenes System, so werden statt eines lauten, ununterbrochenen Fortschritts, wie er in den *Elementen* wirklich stattfindet, die wenig zusammenhängenden Bruchstücke der besondern Untersuchungen bemerklich, die noch weit von der Abrundung eines Systems entfernt sind, und die vielmehr die Gedanken von diesem letzten Ziele aller Wissenschaft abwenden und darüber irre machen können. Die Elemente sind daher das allein Wesentliche und Wichtige im Systeme.

In der That sind auch die Elemente in der Mathematik sorgfältiger ausgebildet worden. Doch fehlt es nicht an besondern Untersuchungen, die zum Theile mitten unter den Elementen stehen, wie z. B. die arithmetischen Bücher *Euklids*, die Untersuchungen über die regulären und symmetrischen Körper u. s. w. Es giebt mehrere dergleichen Untersuchungen, wie z. B. die Theorien der *Fermat'schen* Probleme und andere, zum Theile bewunderungswürdige Untersuchungen, die durch ihre Ausschliessung aus den Elementen keineswegs erniedrigt werden, da sich der höchste Scharfsinn, und die vollkommene Eleganz der Methode gerade in diesen einzelnen Untersuchungen geltend machen kann. Dahin gehören auch die besondern Untersuchungen über die *Classification* der Curven und Flächen zweiter und dritter Ordnung u. s. w. Eben so die Untersuchungen über ausgezeichnete Coordination-Systeme, die neben den Coordinaten-Systemen der geraden Linie aufgestellt

werden, und die eine *Anzahl* überraschend einfacher und übersichtlicher Resultate geben, ohne darum wahrhaft elementar zu sein. — Wenn auch einzelne Sätze aus dem Gebiete der besondern Untersuchungen als *Beispiele* und *Erläuterungen* in die Elemente aufgenommen werden, so bilden sie doch keineswegs einen Theil derselben. Sie sind nur eine schöne und nützliche Sammlung ihrer Anwendungen.

Bei diesem Geschäfte der Elementarisirung hat man kein anderes Criterium, als dass Alles zu den Elementen gerechnet werden müsse, was zu den nachfolgenden Theilen des Ganzen unumgänglich und nothwendig ist. Beim Beginne einer Wissenschaft kann diess unmöglich scharf genug unterschieden werden; darum haben auch alle Wissenschaften anfänglich viel zu viele elementare Lehrsätze; beim Fortschritte trennt sich das Nothwendige und Wesentliche von dem mehr Ausfüllenden und Unwesentlichen, und mit der Vollendung der Wissenschaft ist diese Trennung selbst vollendet.

Es werden z. B. in den Elementen der Geometrie die Dreiecke untersucht. Sie sind elementar, denn ohne sie kann keine andere Figur geometrisch bestimmt werden. Die Dreiecke gehören also zu den elementaren Untersuchungen. Aber man untersucht auch die Vierecke, Fünfecke, Sechsecke u. s. w. Wollte man consequent sein, so müsste man hier schon in's Unendliche gehen. Sie sind aber in den Elementen überflüssig, denn alle Figuren werden schon aus dem Dreiecke verstanden. Sie werden aus den Elementen ausgeschieden und den besondern Untersuchungen überlassen; sie bilden den körperlichen Theil der Geometrie. Denn elementar und körperlich steht sich gegenüber. — Man findet ferner, dass die Parallelogramme zur Messbarkeit der Figuren durch Figuren nothwendig seien. Also sind auch die Parallelogramme elementar, obschon jedes Parallelogramm in zwei Dreiecke zerlegt werden kann. In Bezug auf Messbarkeit der Figuren sind die Parallelogramme elementar, die Dreiecke hingegen abgeleitet. Von der Nothwendigkeit aber Fünfecke,

Sechsecke u. s. w. in den Elementen zu untersuchen, findet sich keine Spur. Sie werden also aus den Elementen weggelassen.

Trennt man auf solche Art alles Elementare von allem Nicht-Elementaren, so wird die Anzahl der geometrischen Lehrsätze bedeutend eingeschränkt werden. Es wird fernerhin nicht mehr rühmlich sein, diese elementaren Sätze zu vermehren; rühmlich wird es vielmehr sein, sie auf ihr rechtes Maass einzuschränken, damit die allgemeine Uebersicht, und die Einsicht in den nothwendigen Gang des Fortschritts gewonnen werde. Das Methodische soll sich immer mehr herausheben, und mit ihr die Erkenntniss.

Diese Elementarisirung ist von ausserordentlicher Wichtigkeit, denn es ist von ihr nicht weniger als Alles, d. h. das wahre Verständniss einer Wissenschaft abhängig. Was hat man, wenn man eine Wissenschaft hat, ohne ihr letztes Verständniss zu haben? Viele Lehrsätze, mit schwerfälligen Anwendungen, Mühseligkeit der Erkenntnisse, die eine Last für das Gedächtniss sind. Was hat man aber mit der Methode der Elementarisirung? Das letzte Verständniss, den Grundgedanken und Schlüssel einer Wissenschaft, die ganze, leichte und schöne Aufeinanderfolge von Lehrsätzen, die zu demselben Ziele führen, und von demselben Ziele getragen werden. Was ist denn z. B. das wahre Ziel aller geometrischen Untersuchungen? Nichts anders, als dass man in rechter Methode einsehen lerne, wie alle geometrischen Grössen durch Grössen ihrer Art nach den bekannten und bewiesenen Gesetzen der Analysis gemessen werden.

Es wird z. B. in der Geometrie der geraden Linie bewiesen, dass alle geraden Linien Vielfache von einander seien, und dass sie ganz wie analytische Grössen in analytischen Operationen behandelt werden können. Ferner wird bewiesen, dass die durch gerade Linien begrenzten ebenen Figuren nach bestimmten Kriterien mit andern ebenen Figuren congruent

oder ähnlich seien, je nachdem ihre Seiten und Winkel der Reihe nach einander gleich, oder aber ihre Winkel gleich und ihre Seiten proportionirt sind. So werden die Figuren selbst *Vielfache* von einander, und können wie analytische Grössen mit einander verglichen und durch einander bestimmt werden. So werden die Zahlen, von denen das Maass der *Flächen* abhängt, durch die Zahlen der *Linien* bestimmt und gemessen. Endlich wird bewiesen, dass jede ebene Figur in eine andere gleich grosse verwandelt werden könne, und dass *verschiedene* Figuren im einfachen oder zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Seiten stehen, z. B. Dreiecke und Parallelogramme im Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen. Dadurch wird der Weg gebahnt, dass auch verschiedene und unähnliche Figuren durch *Gleichungen* verbunden und ganz wie analytische Grössen behandelt werden können. Wird daher die einfachste, durch eine einzige Linie bestimmte Figur, das Quadrat, als Maass aller übrigen Figuren gewählt, so können alle *Flächen*, schon durch das Maass *ihrer Linien* gegen das Maass der *Linien* des Quadrats, ihrer Grösse nach bestimmt und berechnet werden.

In gleicher Methode wird bewiesen, dass die durch ebene Flächen begrenzten Körper mit andern Körpern congruent oder ähnlich seien, je nachdem der Reihe nach die Ecken und Flächen congruent, oder aber die Ecken congruent und die Flächen proportionirt sind. Dadurch werden die Körper selbst als *Vielfache* von einander erkannt, und können in analytischen Ausdrücken durch einander bestimmt werden. Endlich wird bewiesen, dass jeder Körper in einen andern gleichgrossen (nicht identischen oder congruenten) Körper verwandelt werden könne, und dass überhaupt verschieden grosse Körper in einfachen oder zusammengesetzten Verhältnissen ihrer Flächen, also auch ihrer Linien stehen, (da schon bewiesen ist, dass die Flächen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Linien stehen.) So kann also jeder Körper durch jeden andern bloss durch Hülfe der Linien gemessen und analytisch bestimmt

werden. Es bleibt also auch hier nur noch übrig, dass der einfachste Körper, der *Cubus*, als das Maass aller übrigen gewählt werde; die Zahlen-Coëfficienten oder die allgemeinen analytischen Coëfficienten, durch welche die Körper durch den Cubus gemessen werden, werden einzig von den Coëfficienten abhängen, welche aus der Vergleichung der *Linien* dieser Körper mit den Linien des Cubus hervorgehen.

Die Geometrie der geraden Linie wird daher aus sieben Abschnitten bestehen, die über Folgendes handeln werden:

- 1) Ueber das Maass der (geraden) Linien durch Linien;
- 2) über die Congruenz der Figuren, (da anfänglich nur durch Congruenz bewiesen werden kann);
- 3) über die Aehnlichkeit der Figuren (mit Einschluss des Parallelismus der Linien);
- 4) über die Messbarkeit der Figuren durch Figuren.

Diesen planimetrischen Abschnitten entsprechen ganz genau die stereometrischen Abschnitte:

- 5) Ueber die Congruenz (Identität) der Körper;
- 6) über die Aehnlichkeit der Körper (mit Einschluss des Parallelismus der Ebenen);
- 7) über die Messbarkeit der Körper durch Körper.

Den drei planimetrischen und den drei stereometrischen Abschnitten gehen die erläuternden Definitionen und Beweise über die Bildung, Grösse, Lage, Gleichheit und Ungleichheit der Winkel und Ecken als Einleitungen voraus. — Im Allgemeinen ist die *Messbarkeit* der Zweck der geometrischen Untersuchungen; die Messbarkeit wird durch die Aehnlichkeit eingeleitet, die Aehnlichkeit wird aus der Congruenz abgeleitet, d. h. aus Sätzen bewiesen, die schon in den vorhergehenden Untersuchungen über Congruenz bewiesen worden waren.

Nun reiht sich die Geometrie des Kreises an. Werden nämlich die Lehren der geraden Linien in ganzer Reinheit durchgeführt, so sind in ihnen nur noch die durch Linien gebildeten Winkel als unbekannte Grössen enthalten. Aus diesem

Grunde muss man auch anfangs bei den Untersuchungen über die Aehnlichkeit der Figuren die einzelnen Winkel als *gleich* annehmen, weil die Gesetze noch unbekannt sind, nach welchen sich Winkel und gerade Linien gegenseitig ändern. Es stellt sich daher sogleich die Nothwendigkeit dar, diese *erste* Geometrie durch eine *zweite* zu ergänzen, in welcher die Gesetze der gegenseitigen Abhängigkeit der Linien und Winkel entwickelt werden. Dieses ist aber die Geometrie des *Kreises*, und der vom Kreise abhängigen Flächen und Körper.

Wird diese Geometrie durchgeführt bis zur endlichen Ableitung der *trigonometrischen* Functionen, die sowohl in allgemeinen Ausdrücken, als auch in besonders berechneten, und in Tafeln niedergelegten Zahlenwerthen die Gesetze enthalten, nach welchen sich die Bogen mit den Veränderungen der ihnen entsprechenden geraden Linien selber ändern, so können von nun an in den Figuren und Körpern allgemein auch die Winkel und Ecken als *verschieden* genommen werden, da die Gesetze ihrer Abhängigkeit von den geraden Linien bekannt sind. Die darauf folgenden Untersuchungen werden daher alle Figuren und Körper umfassen können, so verschieden sie auch immer sein mögen.

So können nun alle geraden Linien und Kreise, alle durch gerade Linien und Kreise bestimmten Flächen und Körper durch das Maass *einer* geraden Linie, *einer* ebenen Figur, und *eines* von ebenen Flächen begrenzten Körpers in Operationen bestimmt werden, deren Coëfficienten bloss von den Coëfficienten der Linien und Winkel abhängen, so dass man bloss Linien durch Linien und Winkel durch Winkel zu messen braucht, nicht aber unmittelbar Flächen durch Flächen und Körper durch Körper, denn ihr Maass wird *mittelbar*, d. h. wissenschaftlich durch das Maass der Linien und Winkel bestimmt. Diese Bestimmungen sind ganz und gar den analytischen Gesetzen unterworfen, und werden in allgemeinen Gleichungen durchgeführt. Da nun auch alle übrigen geometrischen Grössen durch sie bestimmt

werden können, so walten die analytischen Operationen durchaus und unbeschränkt in allen ferneren geometrischen Untersuchungen.

So werden mehrere Theile, gleichsam mehrere Reihen in der Geometrie unterschieden, wie die Geometrie der geraden Linie, die Geometrie des Kreises, die Geometrie anderer Curven. Es ist von grossem Vortheile, wenn diese Reihen von einander getrennt, und in ihrer Reinheit durchgeführt werden. Sie bilden die Elemente aller späteren Erkenntnisse, und geben eine lichtvolle und übersichtliche Gliederung des Systems. Da sie jedoch in's Unendliche gehen würden, indem unendlich viele Curven untersucht werden müssten, so werden alle Linien, mit Ausnahme der geraden Linie und des Kreises, aus den Elementen weggelassen, da sie doch zuletzt durch gerade Linien und Kreise bestimmt werden können. Es tritt nun die höhere Aufgabe ein, einen raschen und vollkommenen Abschluss zu gewinnen. Es wird gleichsam eine höhere und allgemeinere, elementare Geometrie entwickelt, welche die gesonderten Elemente in ein wesentliches Ganzes vereinigt, und Gleichungen aufstellt, die allen auch noch so verschiedenen Curven gemeinschaftlich sind, wodurch die Unendlichkeit einzelner Fälle in einen einzigen allgemeinen Ausdruck zusammengefasst werden kann.

Diese allen Curven gemeinschaftlichen Einheits-Elemente höherer Ordnung sind die Gleichungen der Coordinaten und ihrer Transformationen, die Gleichungen der Tangenten, Normalen, Asymptoten und singulären Punkte, die Gleichungen der Krümmungskreise und der davon abhängigen Evoluten und Evolventen der Curven, der umhüllenden Curven, und endlich die Gleichungen der Rectification der Curven, der Quadratur der von ihnen abhängigen Flächen, und der Cubatur der von ihnen abhängigen Körper. Hier zeigt sich vornehmlich der (analytische) Differenzial-Calcul als ein mächtiges, reiches Hilfsmittel geometrischer Untersuchungen.

Da in der Mathematik dem Axiome gemäss Alles durch Alles bestimmt werden kann, so scheint es gleichgültig zu sein,

welche Curve als das Maass aller übrigen gewählt werden möge. Und es ist auch in der That gleichgültig. Jedoch die Einfachheit der Operationen und Resultate giebt der *geraden* Linie einen solchen natürlichen Vorzug, dass man gewöhnlich unter geometrischen Bestimmungen nichts anders versteht, als Bestimmungen der geometrischen Grössen durch gerade Linien, als ob es gar nicht anders sein könnte. Dem ist aber nicht so. Es könnte mit jeder andern Linie begonnen, und es könnte die gerade Linie in das System der Bestimmungen dieser Linie eingereiht werden, wenn nicht die Abweichung von dem Gesetze natürlicher Einfachheit eine Reihe von Schwierigkeiten hervorriefe, die oft nur schwer, oder gar nicht zu überwinden sein würden. Es bleibt daher die gerade Linie vorzugsweise die elementare Linie, und mit ihr der Kreis, wegen der ebenen Winkel, die durch gerade Linien gebildet und durch Kreise bestimmt werden.

Ist der Abschluss des Systems der Elemente erreicht, so ist auch der Zweck der Wissenschaft erkannt, und wer den Zweck kennt, der hat den innerlichsten Gedanken der Wissenschaft selbst in seiner Macht. Viele haben die geometrischen Lehrsätze gelernt und bewiesen, ohne den Zweck der Geometrie erkannt zu haben. Erst das Ziel bringt, trägt und erhält das Verständniss des Ganzen.

Sind diese Elementarisirungen einer Wissenschaft auf's Beste durchgeführt, so entsteht endlich die Aufgabe, dass die Wissenschaft in einzelne grosse Theile getrennt und geordnet werde. So werden z. B. in der Mathematik die drei positiven Theile: Arithmetik, Geometrie und Mechanik, dem allgemeinen Theile, der Analysis, gegenüber gestellt. — Die ganze Mathematik, ungetrennt und mit erfahrbarer Grundlage, ist *Mechanik*. Diese hat alle messbaren Grössen und Bewegungen aus einfachen Grössen und Bewegungen zu bestimmen, damit statt des Zusammengesetzten und Unbekannten das Einfache und Bekannte gesetzt werden könne. Diess würde unstreitig höchst schwierig sein, wenn sogleich mit dem Zusammengesetzten und Ganzen,

d. h. mit der Mechanik begonnen würde; und wenn Schwierigkeiten durch Trennung und Elementarisirung ihrer Theile erleichtert werden, so ist es Aufgabe der Methode, diesen elementaren Gang zu finden, und zu lehren. — Es wird daher in der Mechanik von der Zeit und von der Geschwindigkeit abstrahirt, wodurch die vorbereitende Wissenschaft der *Geometrie* geschaffen wird. Nur ist Abstraction, wie schon erwähnt, nicht in dem Sinne zu nehmen, als ob das Wirkliche, der Grund des ursprünglich Gedachten, bei Seite gelegt, und ein reines Gedankenbild an seine Stelle gesetzt würde. In der wahren Abstraction wird vielmehr das Wirkliche als Grundlage beibehalten, es wird nur von bestimmten, *also auch der Zahl nach endlichen Unterschieden* in ihm weggesehen, wodurch das nämliche Wirkliche, aber in einfacher Gestalt, als Gegenstand der Untersuchung bleibt. Diese Abstraction von Unterschieden, die der Zahl nach *endlich* sind, giebt auch ein endliches Gebiet der elementaren Theile einer Wissenschaft. — In der Geometrie wird gleichsam eine gleichgültige Zeit und eine gleichgültige Geschwindigkeit für alle Grössen vorausgesetzt; Zeit und Geschwindigkeit sind die in allen Resultaten unveränderten Grössen; sie fallen von selbst aus, und es bleiben nur noch die Grössen des gemessenen Raumes als Elemente der Bestimmung übrig.

Die Geometrie ist nichts anderes, als diejenige Wissenschaft, welche die Gesetze des Maasses der durchlaufenen Räume giebt, und zwar der Linien durch Linien, der Flächen durch Flächen, der Körper durch Körper; das Messen selbst ist nur ein beliebig oft wiederholtes *Wegnehmen* einer Linie von einer Linie, einer Fläche von einer Fläche, eines Körpers von einem Körper, also Addition oder Subtraction durch Bewegung. Zur leichteren Beweisführung nimmt man statt der gleichförmigen Bewegung die *Congruenz*, oder die Deckung der Linien durch Linien, der Flächen durch Flächen, der Körper durch Körper, was nur einen leichteren und fasslicheren Ausdruck für die gleichförmige Bewegung der Mechanik giebt. Da Zeit und Geschwindigkeit &c

in der rein geometrischen Behandlung des Raumes in allen Grössen gleichförmig sind, so werden sie nicht ausgedrückt, weil sie nichts zur Bestimmung beitragen. Und weil es ein überflüssiger Aufwand wäre, da von Bewegung zu sprechen, wo von Zeit und Geschwindigkeit abgesehen wird, so wird auch nicht die Bewegung, sondern die Congruenz oder Deckung in der Geometrie als Grund der Beweise genommen. Im Anfange ist Dasjenige geometrisch gleich, was sich deckt. Später wird diess selbst auf die Mechanik übertragen, wenn einmal die Regeln der Uebersetzung der Congruenz in die Bewegung, und umgekehrt, in strenger Methode erläutert und bewiesen worden sind.

Die Geometrie wird aber *vor* der Mechanik entwickelt, damit alle Aufgaben schon gelöst seien, die das rein geometrische Element in der Mechanik bilden. Dadurch sind bei dem wirklichen Beginne der Mechanik die Schwierigkeiten zum Theile überwunden, und es ist von nun an eine bei Weitem grössere Aussicht des Gelingens vorhanden, als wenn die ganze Aufgabe ohne Trennung und theilweise Ueberwindung ihrer Schwierigkeiten angegriffen worden wäre.

In beiden Wissenschaften, in der Geometrie und in der Mechanik, wird untersucht, wie eine einfache Grösse, die als Maass der andern gilt, in den zusammengesetzten Grössen enthalten sei. Dieses „Wie“ bestimmt sich der Natur der mathematischen Wissenschaft gemäss als ein „Wie viel“, und es ist in beiden Wissenschaften ein operatives Element enthalten, das die Gesetze umfasst, wie vielmals Grössen nach allgemeinen Ausdrücken grösser seien, als andere, und wie dieses mit Nothwendigkeit erkannt werden könne.

Werden diese Gesetze allgemein ohne besondere Rücksicht auf die ihnen zu Grunde liegenden geometrischen oder mechanischen Grössen entwickelt, so wird die Wissenschaft der *Analysis* geschaffen. Jede Vernunft-Wissenschaft wird eine solche allgemeine Operationslehre haben müssen, denn jede muss eine bestimmte Verbindung ihrer Begriffe haben, ein bestimmtes

Axiom, und durch dieses eine bestimmte allgemeine Operationslehre. — Wird die Analysis im Systeme zuerst entwickelt, und wird in ganzer Allgemeinheit gezeigt, wie die einfachsten Operationen die zusammengesetztesten bilden, und wie umgekehrt in allen zusammengesetzten Operationen die einfachen enthalten seien, so wird die Analysis als die Grundlage aller Beweise in allen Gebieten der Mathematik erkannt. Es würde auch überflüssig sein, das noch in jedem Gebiete einzeln zu beweisen, was allgemein für alle bewiesen worden ist. Es ist kürzer und leichter, Operationen einmal und allgemein zu beweisen, als mehreremale und nur für besondere Gebiete, wobei noch jedesmal auf die besonderen Eigenschaften der diesen Gebieten zu Grunde liegenden Grössen Rücksicht genommen werden müsste. Es würden jedenfalls, weil theils geometrische, theils mechanische Grössen zu Grunde liegen, mehrere besondere Operationslehren einzeln und nach einander entwickelt werden müssen. Würde man aber in dieser Entwicklung auf dasjenige sehen, was *allen* Grössen gemeinschaftlich ist, auf dasjenige, was die mathematischen Grössen überhaupt zu mathematischen Grössen macht, so würde man gerade die allgemeine Analysis treffen und bilden, die also durch die Ordnung der Wissenschaft selbst als solche geboten wird.

Würden alle Operations-Beweise für besondere geometrische oder mechanische Grössen einzeln geführt, so würden sie immer nur Resultate für einzelne Grössen geben und der Allgemeinheit entbehren; während die Analysis, deren Grundlagen die allgemeinen und möglichen Grössen sind, auch diejenigen Operationen zeigen wird, die nicht in wirklichen Grössen ausgeführt werden können. Daraus geht auch für die besonderen Gebiete der grosse Vortheil hervor, dass ihnen die Analysis eine Allgemeinheit vorhält, die ihnen unbekannt geblieben wäre, nämlich die ganze Fülle der in ihnen möglicherweise enthaltenen Auflösungen, von denen zwar nur eine, oder einige wenige wirklich und ausführbar sein können, die aber alle verwirklicht

werden könnten, wenn die zu Grunde liegenden Bedingungen der Reihe nach verändert würden, Bedingungen, die aus der allgemeinen analytischen Auflösung von selbst abgelesen werden können. Ueberdiess muss es der Grund-Character jeder Wissenschaft sein, dass in jeder Doctrin nur Gleichartiges vereinigt werde, in der Analysis Analytisches, in der Geometrie Geometrisches, in der Mechanik Mechanisches.

Und nun ist noch ein Gebiet nothwendig, in welchem die analytischen Operationen als vollendete Erkenntnisse enthalten sein sollen. Alle diese Operationen sind Operationen in Zahlen; die Zahlen sind die *bestimmten* analytischen Operationen. So ist in $a + a = 2 a$ die Zahl 2 die bestimmte, geschlossene Operation, und die Ziffer 2 das Operationszeichen. Soll nun dieses Gebiet (Arithmetik) die Erkenntniss vollenden, so müssen alle Zahlen erkannt sein. Diess sind sie auch. Durch die Anordnung des Systems sind sie ganz in die Gewalt unserer Erkenntniss gegeben. So ist $2 = 1 + 1$, also aus (1) erkennbar, $3 = 2 + 1$, also aus (2) erkennbar, $4 = 3 + 1$, $n = m + 1$ u. s. w. Ueberhaupt wird jede nachfolgende Zahl aus der vorhergehenden und diese aus der Einheit erkannt. In der Erkenntniss aller Zahlen treten nur die einfachen *Additions-Operationen*, und keine anderen ein, *und daraus werden sie erkannt*. Ist nun irgend eine Zahl als Resultat aus noch so verwickelten und zusammengesetzten Operationen hervorgegangen, so reiht sie sich doch in die durch Addition gebildete Zahlenreihe ein, und findet darin ihr Verständniss. Also besteht die Erkenntniss darin, dass das Nämliche zweimal vorkommt, einmal in den Operationen der Probleme, das anderemal in der Reihe der Erkenntnisse (in der Zahlenreihe), so dass Eines für das Andere, Erkanntes für das Unerkannte gesetzt werden könne. So ist die Operation als Zahl einmal ein (erkanntes) Glied der Zahlenreihe, und das anderemal ein Schluss einer allgemeinen analytischen Operation. So kann also das Erkannte statt des Unerkannten gesetzt werden. So ist z. B. $\pi = 3,14159$

der Schluss der Kreismessung, und zugleich ein Glied der durch Addition gebildeten Zahlenreihe und als solches vollkommen erkannt. Ja so einfach und natürlich ist die Erkenntniss der Zahlen, dass die Zahlenreihe nicht einmal wirklich gebildet und aufgezeichnet und bewahrt wird, wie es z. B. mit den Logarithmen in logarithmischen Tafeln der Fall ist, denn die Zahlenreihe kann jeden Augenblick gebildet und hergestellt werden.

Jede analytische Operation, wenn sie ausgeführt werden kann, ist erst dann vollendet, wenn sie auf Zahlen gebracht worden ist. Keine geometrische oder mechanische Erkenntniss ist vollkommen, oder geschlossen, wenn sie nicht ihren Ausdruck in Zahlen gefunden hat. Alle übrigen Sätze sind in Absicht auf diess letzte Ziel blosse Zwischensätze, z. B. das Quadrat der Hypothenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten; vollendet sind diese Sätze erst, wenn sie in Zahlen berechnet worden sind.

Sowie aber ein Problem auf Zahlen-Operationen gebracht worden ist, wird es nicht weiter verfolgt, es wird als gelöst angesehen. Die Zahlen-Operationen sind aber auch auf's Leichteste auszuführen, wie Addition, Multiplication, Potenzirung; oder wenn ihre Ausführungen schwierig und weitläufig sind, so werden sie ein für allemal berechnet, und in Tafeln zusammengestellt, die nun jede verlangte Operation als Erkenntniss geben, wie die logarithmischen, trigonometrischen Tafeln und andere. Die additiven, multiplicativen und potenziellen Tafeln haben wir nicht; wir ersetzen sie durch die Fertigkeit im Operiren. Je mehr aber solche Tafeln für nachfolgende Uoperationen berechnet werden, desto mehr wird das Gebiet der Mathematik wahrhaft bereichert; die Arithmetik enthält und bewahrt die wahren Schätze der Mathematik; sie giebt alle Resultate, die aus noch so verwickelten Operationen hervorgehen mögen, als höchst einfache Resultate der Addition.

Wir haben darin ein Ebenbild der Natur, die auch nur in Additionen verbindet. Die andern analytischen Operationen sind

blosse *Abkürzungs*-Operationen, die wir selber bilden und einführen; aber in den Zahlen-Resultaten lösen wir alle Operationen wieder in die einzige und wahre Operation der Addition auf. Ist diess geschehen, so ist Alles erkannt, was erkannt werden sollte; das Verschlungene, Vielfache, Unbekannte ist durch Gelöstes, Einfaches, Bekanntes gegeben worden; wir haben Erkanntes gegen Unerkanntes eingetauscht. So sind alle Erkenntnisse in feinsten Linie ganz unsere That und unser Werk; wir bilden sie selbst schon im Systeme voraus, in der Zahlenreihe, welche die einzige, wahre und natürliche Operation enthält; nur wissen wir anfangs bei der Bildung dieser Theile noch nicht, welchen Grössen alle diese Zahlen entsprechen werden, sie erwarten erst diese Grössen. Finden wir dann in den Operationen die Zahlen, welche den Grössen entsprechen, so sind die Zahlen nicht mehr das Unbekannte, sondern das bereits Voraus-Gebildete, Erkannte, und es ist sofort bloss Erkanntes in unserer Erkenntnis enthalten. — Es war von jeher schwierig, die Arithmetik auf die rechte Art zu definiren, und ihr den rechten Platz im Systeme der Mathematik anzuweisen. Man hat immer Geheimnisse in ihr gesucht, und das wahre Geheimnis der mathematischen Wissenschaft enthält sie allerdings; es ist aber das offenbarste aller Geheimnisse.

Die drei Gebiete der Mathematik, nämlich Arithmetik, Geometrie und Mechanik haben etwas Positives, während die Analysis das Freie und Allgemeine der Operationen enthält. — Dieses Positive ist theils von der Natur des Gegenstandes gegeben, theils vom Verstande nach der besten Wahl eingeführt worden. Die Mechanik hat das Positive, dass die besonderen Bedingungen des Raumes und der Zeit gegeben sind, und dass *wir* noch ein bestimmtes Maass wählen, durch welches alles Zusammengesetzte gemessen wird, die Zeit durch ein angenommenes gleichförmiges Maass der Zeit, die Geschwindigkeit durch gleichförmige Geschwindigkeit, die Linie durch die gewählte gerade Linie u. s. w. Es würde die Mechanik eine

ganz andere Gestalt haben, wenn statt dieser Grössen andere als Maasse gewählt worden wären, was immerhin möglich gewesen, aber auch eine viel schwierigere Wissenschaft gebildet haben würde, als die bestehende und in den einfachsten Sätzen getragene Wissenschaft der Mechanik jetzt ist. — In der Geometrie sind die Bedingungen des Raumes gegeben, und der Verstand führt ein selbstgewähltes Maass in sie ein, die gerade Linie für alle Linien, das Quadrat für alle Flächen, und den Cubus für alle Körper. Unstreitig hätten auch andere Maasse angenommen, und die geometrischen Sätze nach diesem Maasse umgebildet werden können. Es könnte z. B. für alle Linien die Kreislinie, für alle Flächen die Kugel-Oberfläche, für alle Körper die Kugel als Maass genommen werden, es ginge ein vollkommenes System der Geometrie hervor, und alle Sätze würden anders aussehen, als die jetzigen, obwohl sie auch in diese übersetzt werden könnten, weil Alles in derselben Wissenschaft zuletzt zusammenhängt, und nur der rechte Anfang dem rechten Verstande überlassen bleibt. Diese andere Geometrie wäre aber weit zusammengesetzter und schwieriger, als die durch die gerade Linie und durch die von ihr abhängigen Flächen und Körper bestehende und beherrschte Wissenschaft. Und am Ende würde man doch nur das Schwerere für das Leichtere vergeblich eingetauscht haben, da die vollendende Arithmetik doch alle Resultate in der Addition geben muss. — Auch die Arithmetik enthält etwas Positives, nämlich die Wahl der Summen von Zahlen und Ziffern, die als einfache genommen werden, und die Wahl der Art und Weise ihrer Combinationen zu allen Zahlen, die von nun an eine bestimmte und nicht mehr jede mögliche Combination sein kann. Alle Regeln der Arithmetik in Beziehung auf Ziffern-Rechnungen würden anders lauten, und doch wahr sein, wenn z. B. anstatt des Dezimal-Ziffern-Systems das Duodezimal-Ziffern-System gewählt, und wenn statt der bewunderungswürdig einfachen Combinationen der Ziffern mittelst ihrer Stellenwerthe und der stellvertretenden Null, etwa nur einige Arten von Stellenwerthen beibehalten, die

Ziffer Null aber weggelassen würde, wodurch unstreitig auch eine allgemeine und wahre Arithmetik geschaffen werden könnte, aber eine mit solchen Schwierigkeiten verbundene, dass in ihr nur mit der grössten Anstrengung gerechnet werden könnte, während alle Rechnungen in der gewöhnlichen Arithmetik so leicht sind, wie ein Spiel. Man vergleiche nur unser Zahlen-System mit dem Systeme der Griechen und Römer, unsere Rechnungen mit ihren Rechnungen, und denke sich durch die letztern z. B. nur die logarithmischen Tafeln berechnet, so wird sich der Unterschied mit Macht hervorheben, und bei näherer Betrachtung immer einleuchtender werden. Man bilde sich beliebig andere Systeme, und versuche in diesen die Rechnungs-Gesetze auch nur für die ersten hunderttausend Zahlen zu geben, so wird man sogleich inne werden, dass sich die Regeln immer vervielfältigen, während nach unserm durch den gediegensten Verstand geschaffnen Ziffern-Systeme mit combinatorischer Wiederholung der Ziffern auch die Regeln sich wiederholen, und die nämlichen bleiben bei allen Zahlen, daher sie auch mit gleicher Leichtigkeit allgemein angewendet werden können.

Es liegt also im Wesen der positiven Doctrinen, dass sie auch anders sein könnten, als sie wirklich sind; es könnten sowohl Mechanik als Geometrie durch andere Maasse, als durch das Maass der geraden Linie bestimmt werden; eben so könnten in der Arithmetik andere Zahlen- und Ziffern-Systeme gelten, als das Zehn-Zahlen- und Ziffern-System. Alle solchen Erkenntnisse würden wahr und richtig, aber weit schwerer und verwickelter sein, als sie jetzt sind.

Diesen *positiven* Zweigen der Mathematik stehen die analytischen Operationen gegenüber, die ihrer aller gemeinschaftliche Grundlage sind, da alle Sätze durch Analysis bewiesen werden. Untersucht man die analytischen Operationen für sich allein, ohne dass auf das Positive und Gewählte, das ihnen zu Grunde liegt, Rücksicht genommen wird, in solcher Allgemeinheit, dass sie nicht bloss für die aufgezählten besondern Grös-

sen, sondern für alle Grössen mathematischer Art gelten sollen, z. B. nicht etwa für die Linie, weil sie Linie ist, sondern allgemein, weil sie mathematische Grösse ist, so bildet diese Untersuchung und Herstellung der Allgemeinheit die Wissenschaft der Analysis, d. h. der Operationslehre. Diese hat den positiven Zweigen gegenüber die Eigenschaft, *dass sie durchaus nicht anders sein kann, als sie wirklich ist*. Die in ihr enthaltenen Operationen müssen sich in allen Systemen und Sprachen finden, ganz in der Weise und Aufeinanderfolge, in dem Wesen und in den Definitionen, wie sie sich in irgend einem (wahren) Systeme finden und beweisen.

Jede Vernunft-Wissenschaft wird eine ähnliche Eintheilung haben müssen; ein erfahrbares Gebiet, eine Operationslehre, und eine abschliessende, erkenntnissgebende, positive Doctrin, wie die Arithmetik ist. Diese letzte Doctrin wird in den übrigen Vernunft-Wissenschaften unstreitig das Schwierigste zu finden sein. Denkt man in der Arithmetik bloss an die Zahlenreihe und an die Addition, so muss alle Hoffnung aufgegeben werden, dass etwas so Leichtes und Einfaches in den übrigen Vernunft-Wissenschaften hergestellt werden könne. Allein der grössere Theil der Arithmetik besteht in den bereits berechneten oder noch zu berechnenden Tafeln; diese ergänzen erst wahrhaft den Begriff der Arithmetik; und etwas diesen Tafeln Entsprechendes wird in jeder Vernunft-Wissenschaft aufgestellt werden können. —

Es bleibt noch übrig, etwas von Analysis und Synthesis, als verschiedenen Zweigen der Methode, zu erinnern. — Es ist schon von Mehreren erklärt worden, dass sie nicht wissen, was Synthesis oder Analysis sei. Sie werden nicht die Einzigen sein, denen es so ergangen ist, obgleich sie die Einzigen sind, die es eingestanden haben. Es ist von jeher nicht viel Klarheit in diesen Begriffen gewesen, und *Kant* hat sie endlich geradezu verwirrt. —

Es giebt immer nur eine einzige Methode, und es ist

(die Vollkommenheit der Wissenschaft vorausgesetzt) ganz und gar nicht gleichgültig, ob die Beweise so oder anders geführt werden, als sie wirklich geführt werden können. Es muss so verfahren werden, wie es die rechte Methode will. Synthesis und Analysis sind überall vereinigt; in der Aufstellung der Lehrsätze ist die Induction analytisch, die Analogie synthetisch; in den Beweisen ist die Substitution analytisch, die Contradiction synthetisch; beide sind so verschwistert, dass sie gar nicht getrennt werden können. Sie geben eine einzige Methode, die Methode der Erfindung und der Beweise.

Man spricht aber z. B. von synthetischer und von analytischer Geometrie, man unterscheidet sie; wie ist diess möglich? Diess wird sich aus der historischen Entwicklung der Mathematik erklären lassen können. Die Mathematik hat sich ganz anders historisch entwickelt, als sie systematisch geordnet werden muss. Die Ausbildung ihrer sämtlichen Theile geschah miteinander, und ein Fortschritt, der in einem dieser Theile gemacht wurde, veranlasste oft gleichzeitige Fortschritte und Erweiterungen in den übrigen Theilen. Doch darf behauptet werden, dass ohne die ersten Lehren der (mathematischen) Analysis keiner dieser Theile wissenschaftlich begonnen worden sei. Freilich war diese Analysis anfangs nur eine Sammlung von Maximen, nach denen die einzelnen bestimmten Grössen behandelt wurden, wie von den *Euklid'schen* Axiomen gezeigt worden ist. Daher könnte man die neuere Analysis die vollkommene Ausführung und Theorie der *Euklid'schen* Axiome nennen; ihre Resultate verhalten sich zu den Anwendungen auf Arithmetik, Geometrie und Mechanik, wie Axiome; und es ist nur der Unterschied, dass die neuere Analysis im Gegensatze zur älteren Geometrie ihre Resultate beweist, und sie nicht innerhalb ihrer selbst als Axiome hinstellt, worin sie unstreitig viel wissenschaftlicher verfährt, als in der Geometrie der Alten geschehen ist. Und wenn die griechische Mathematik aus so dürftiger Analysis doch so viel Arithmetik, Geometrie und Me-

chanik beweisen konnte, als sie wirklich bewiesen hat, so ist von selbst einleuchtend, wie unvergleichlich grösser und wichtiger die Fortschritte der neueren Wissenschaft in diesen drei Zweigen der Mathematik sein müssen, da sie statt weniger Axiome eine vollkommen ausgebildete, reiche und sichere Analysis als Wissenschaft voraussetzen und anwenden kann.

Obgleich also gewöhnlich die Geometrie der Alten als *Synthesis* der neueren Analysis gegenübergestellt wird, so ist doch unbestreitbar, dass auch die Alten wenigstens ein *Minimum* von Analysis gehabt, und wirklich angewendet haben. — Die *Euklid'schen* Axiome stimmen ganz mit den ersten (beweisbaren) Sätzen der Analysis überein, sie gelten allgemein von allen möglichen, nicht bloss von den geometrischen Grössen, wie sich auch *Euklid* nicht auf die Geometrie als auf ihren Grund beruft, sondern sie als *gemeinschaftliche* Erkenntnisse (*κοινὰ ἔννοια*) voraussetzt, und sie als solche in seinen geometrischen Beweisen anwendet und gebraucht.

Was aber die *Synthesis* characterisirt, ist Folgendes: Schon bei *Euklid* ist die Geometrie über das Gebiet der Anfangsgründe der Analysis hinausgegangen; es kommen in der Geometrie z. B. Potenzen vor, während die analytische Theorie der Potenzen nicht in den Axiomen erläutert worden war. Die Analysis war also nicht zur Höhe der Geometrie ausgebildet. Was war nun zu thun, um diess Mehr, das die Geometrie vor der Analysis voraus hatte, zu beweisen? Da geschah es denn, dass man die neuen geometrischen Operationen mit Hülfe, nicht der ganzen Analysis, sondern jener dürftigen ersten Axiome, nicht mehr allgemein, sondern bloss für geometrische Grössen entwickelt und bewiesen hat. Man war beim Mangel der Analysis genöthigt, diese Sätze als bloss geometrische Sätze aufzustellen, die man auch recht gut unabhängig von Geometrie als allgemein gültige, analytische Sätze hätte aufstellen können. Also statt die Analysis zu erweitern, hat man nur eine besondere Doctrin erweitert, weil man bloss das Verfahren geome-

trischer, nicht aber allgemein axiomatischer, oder analytischer Beweise gekannt hat. Und doch hatte man nicht in diesen geometrischen Beweisen die Analysis ganz ausgeschieden, und auch nicht so viel von ihr aufgenommen, als zur Consequenz und Zierde der Wissenschaft nothwendig war; man ist da, wo es sich *traf*, über die ersten Anfänge hinausgegangen, aber nicht allgemein in nothwendiger Methode, sondern wie es der zufällige Stoff der geometrischen Untersuchungen dargeboten hat. Solch' eine Wissenschaft nun, aus zweierlei Elementen gebildet, in der die Analysis nicht zur Höhe des besondern Gebiets der jedesmaligen Untersuchung emporragt, und wo statt ihrer allgemeinen Lehren Surrogate besondrer Lehren als Grundlagen der Beweise zusammengesetzt werden, eine Wissenschaft mit solchem Verfahren wird *Synthesis* genannt.

Hingegen diejenige Wissenschaft, die nicht ein Minimum von Analysis entwickelt, nicht bloss Addition und Multiplication, sondern auch Potenzen, Logarithmen u. s. w. allgemein analytisch aufnimmt, und beweist, die daher die ganze Analysis, da sie einmal unentbehrlich ist, als Wissenschaft voraussetzt und beweist, und alle analytischen Lehren, nicht bloss jene paar Anfangssätze auf die besondern Gebiete der Arithmetik, Geometrie und Mechanik anwendet, wird *analytische* Wissenschaft genannt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Synthesis und Analysis, wie die Worte andeuten, besteht daher ganz und gar nicht; sie sind dasselbe, und unterscheiden sich nur dem Grade nach als vollkommene und unvollkommene Methode und Wissenschaft, indem Synthesis nur eine verkümmerte Analysis, und der Höhe der Wissenschaft völlig unangemessen ist. Die Analysis entwickelt ihre Lehren vermöge des combinatorischen Elementes ihrer Methode zur letzten Allgemeinheit; sie behält freien Blick über alle möglichen Fälle, und ist gewiss, dass keiner ausgeschlossen wird, und dass überhaupt kein Schritt gemacht wird, der einen vorhergehenden Schritt vermissen liesse; statt sich Probleme geben zu lassen, sucht sie den Inbegriff aller

möglichen Probleme zu erhalten. Die Synthesis aber kennt diess combinatorische Element der Allgemeinheit nicht, und hat es nicht in ihre Methode eingeführt; dafür entwickelt sie ihre Lehren, wie sie vom *Stoffe* der Arithmetik, Geometrie und Mechanik geboten werden, d. h. wie man zufällig auf die eine oder die andere kommen möge. Bei diesem Verfahren ist unvermeidlich, dass viele Zwischenglieder übergangen werden, bis entweder der gegebene Stoff, oder die Analysis auf sie aufmerksam machen.

Analysis ist Fortschritt mit allgemeiner, apriorischer und nothwendiger Combination; Synthesis ist Fortschritt, bei dem statt des combinatorischen Elementes der Zufall eintritt. Welche Methode die andere überflügeln, und endlich ein entschiedenes Uebergewicht erlangen musste, war auf's Leichteste vorauszu- sehen. Es ist kein Ruhm für die Synthesis, wenn nachgewiesen wird, dass sie am Ende doch die analytischen Lehren ebenfalls beweisen könne, denn das bezweifelt die Analysis ganz und gar nicht, da sie sich als einer und derselben Natur und Wesenheit mit der Synthesis bekennt, und nur die Combinationen der allgemeinen Methode dem Zufalle des Stoffes vorzieht. Wird die Synthesis auf einen Schritt aufmerksam gemacht, den sie übergangen, so nimmt diese Ermahnung die Stelle ein, die anderwärts bei ihr der Zufall hatte, sie ist auch in der That für sie zufällig. Denn würde sie die Gründe dieser Ermahnung auffassen, so würde sie gerade das aufnehmen, was die Analysis zur Analysis macht, die apriorische Allgemeinheit der Combination. Sie würde selbst Analysis werden. Mit dem Fortschritte der Wissenschaft trat die Analysis zuerst neben der Synthesis auf, vicariirte geschichtlich immer mehr für die Synthesis, und ersetzte sie endlich ganz. Nur behielt sie dieselbe Grundlage als beiden gemeinschaftlich bei, sie hatte darauf eben so viel Anspruch, als die Synthesis. So steigerten sich in der Mathematik Gegenstand und Gedanke, bis ersterer dem letzteren ganz unterthan wurde.

Ist einmal die Analysis vollständig entwickelt, so sind die drei besonderen Theile der Mathematik sehr leicht wissenschaftlich zu überschauen, und zu ordnen. Es tritt nämlich nur noch die besondere Aufgabe ein, die analytischen Operationen nach Beschaffenheit der jedem Theile zu Grunde liegenden Grössen in Ausdrücke dieser Grössen zu fassen, und umgekehrt, Ausdrücke dieser Grössen in die Sprache der Analysis zu übersetzen. Ist dann jede dieser besondern Wissenschaften so weit entwickelt, dass diese gegenseitige Uebertragung allgemein bewiesen, und verstanden werden kann, (und diess geschieht in ihren Anfängen), so wird sie von nun an ganz analytisch geordnet, und das ganze Geschäft besteht nur in einer fortwährenden und lichtvollen Uebertragung der Analysis auf die besondern Grössen. Aber bis zu dem Punkte, wo die Gesetze der Uebertragung vollständig gegeben werden, müssen sie aus der Natur der diesen Wissenschaften zu Grunde liegenden Grössen entwickelt werden, was übrigens nur eine sehr beschränkte Anzahl von Lehrsätzen umfasst. — Es wäre eben so verkehrt, im Glauben an die Allmacht der Analysis jede besondere mathematische Wissenschaft als reine Analysis zu betrachten, und das Eigenthümliche und Positive, worin sie gegründet ist, zu verkennen, als umgekehrt, blosse Synthesis fortzubilden, und Analysis zu verkennen. Denn da Analysis die Lehre der reinen mathematischen Operationen ist, so müssen zwar diese Operationen, auf welchem Gebiete sie auch angewendet werden wollen, aus der Analysis geschöpft werden, aber die besondern, durch die Natur gegebenen Grössen, worauf diese Operationen angewendet werden, müssen aus ihrer Eigenthümlichkeit erläutert, und so weit fortgebildet werden, bis ihre Ausdrücke den analytischen Formeln adäquat sind. Von da aus werden sie in rein analytischen Operationen entwickelt, nur dass jetzt die Grössen, die in diesen Formeln enthalten sind, nicht mehr die unbestimmten, möglichen, Grössen der Analysis, sondern die bestimmten und eigenthümlichen der einzelnen Wis-

senschaften sind. Es ist auch in der *That* immer so gehalten worden, nur die *Erklärungen* sind manchmal davon abgewichen. Wenn z. B. in der Geometrie gesagt wird: es ist *sichtbar*, oder deutlich, *selbst ohne alle Figur*, dass diess oder jenes stattfindet, so kann diess wahrlich nicht für Analysis gehalten werden. Jeder Mathematiker, auch der synthetische, kann die geometrischen Gesetze ohne eine *sichtbar verzeichnete* Figur ableiten, wie auch jeder die ganze Mechanik ohne solche Figuren construiren kann; aber durch Weglassung sichtbarer Figuren wird er nicht glauben können, dass er ihrer auch innerlich im Gange des Beweises entbehrt habe; denn da wird unbewusst doch darauf Rücksicht genommen, und niemals wird eine rein analytische Formel durch sich selbst eine Linie, eine Fläche, oder ein Körper, oder eine bestimmte Bewegung u. s. w. sein können, ausser in der Abstraction, wenn nämlich von dem abgesehen wird, was die Linie zur Linie, die Fläche zur Fläche, den Körper zum Körper, und die Bewegung zur Bewegung macht, wovon aber da nicht abgesehen werden darf, wo insbesondere Linien, Flächen, Körper, Bewegungen u. s. w. untersucht, d. h. wo die drei positiven Zweige der Mathematik behandelt werden.

Der wahren und kräftigen Methode stehen also zwei falsche und schwache Methoden gegenüber:

1) Zuerst die falsche Synthesis. Diese weiss es sich nicht schwer genug zu machen. Sie beweist das Nämliche so oft, als verschiedene Zweige einer und derselben Wissenschaft vorhanden sind. Aber in diesen Beweisen verfährt sie niemals auf die rechte Art, sie beweist nicht im Zusammenhange des ganzen Systems, sondern nur, wie es die zufällige Ordnung der Sätze mit sich bringt, oder erfordert. Daher kommt eben das Schwierige und Mühselige, das im Gefolge ihres Verfahrens ist.

2) Die falsche Analysis. Diese will über die besonderen und eigenthümlichen Schwierigkeiten jedes Gebietes mit leicht-

tem Schritte und mit dem allgemeinen Troste hinwegeilen, dass denn doch auch die analytischen Resultate in diesem Zweige gelten werden. Diess soll sie aber gerade aus der eigenthümlichen Grundlage dieses Zweiges erst finden und beweisen. Das jedem Zweige Eigenthümliche kann nicht analytisch hervorgebracht werden, eine blosser Gleichung wird z. B. niemals für sich schon eine Fläche, obgleich sie von einer Fläche gelten kann. Dass sie aber von ihr gelte, und wie sie gelte, diess soll eben aus der Natur der Fläche gezeigt werden. Hier darf man sich der Mühe des Beweisens nicht überhoben wähnen. Es giebt solche analytische Geometrien. Was sie voraussetzen, das sollen sie eben beweisen; dann erst kann Analysis eintreten.

Je ärmer, je anfänglicher jede Wissenschaft ist, desto mehr wird sie der falschen Synthesis huldigen, und huldigen müssen. Sie findet eben darin die Hülfsmittel, die Krücken, an denen sie sich zu dem männlichen Schritte der Methode heranbilden kann. Wird sie aber, je entwickelter sie sein wird, desto mehr analytisch werden? Nein, sie wird *methodischer* werden. Nicht Synthesis und Analysis sind sich entgegengesetzt, sondern Methode und Nicht-Methode, und wird das Schwache gestärkt, das Mangelhafte getilgt, und das Halbe überwunden, dann darf nicht etwa die andere Hälfte hervortreten, sondern es soll die ganze, wahre und starke Methode errungen werden.

Dreizehnte Untersuchung.

Ueber die Ordnung der Wissenschaften.

Die Ordnung der Wissenschaften kann aus den vorhergehenden Untersuchungen mit größter Bestimmtheit angegeben werden. — Zuerst kann es keinem Zweifel unterworfen sein, dass es eine allgemeine oder formelle Logik, eine Methodenlehre, gebe, und dass diese die erste aller Wissenschaften sei. Denn in jeder Wissenschaft soll Methode sein; sie muss also überall vorausgesetzt und angewendet werden. — Es ist bezweifelt worden, ob es eine allgemeine Logik geben könne; die Einen haben sie zur Metaphysik, die Andern zur Physik des Geistes gemacht. Allein die allgemeine Methodenlehre will nicht Wesenheit erkennen lehren, sie will nur zeigen, wie überhaupt das Denken beschaffen sein müsse, wenn Wissenschaft möglich sein soll. Dass es nun aber in dem Wesen des Denkens liege, so zu verfahren, wie gefordert wird, diess zu zeigen und zu beweisen ist nicht Aufgabe der Logik, sondern der Metaphysik, denn diese soll die Wesenheit der Dinge und des Denkens erkennen² lehren.

Aus dem Begriffe der Wissenschaft, als eines Systems *vieler* Erkenntnisse, geht der Begriff und der Inhalt der allgemeinen Logik hervor. Wie muss verfahren werden, dass Erkenntniss aus Erkenntniss abgeleitet und bewiesen werden

könne? Diess ist die Frage, deren Beantwortung die Wissenschaft der Logik geben wird. Ihre Voraussetzung ist die allgemeine Vernunft. Daher muss auch die Logik das Axiom der Vernunft, d. h. das Axiom des Nicht-Widerspruchs voraussetzen.

Nun könnte aber die Schwierigkeit gemacht werden, dass die Logik begonnen werde, ehe ihr Grund (durch Metaphysik) gelegt sei. Diese Schwierigkeit wird durch die Erklärung abgeschnitten, dass die Logik ihren apriorischen Anfang in der Frage habe: Wenn Begriffe gegeben sind, wie wird verfahren werden müssen, wenn sie systematisch verbunden und bewiesen werden sollen? — Mag sich nun am Ende das Eine oder das Andere herausstellen, dass die Erkenntnisse möglich oder nicht möglich seien, so wird diess die Logik nicht einmal wesentlich berühren, denn sie untersucht bloss die subjectiv möglichen und nothwendigen Bedingungen des Denkens. Wird es bestimmte Wissenschaften geben, so werden die in der Logik gefundenen Lehren in ihnen angewendet und ausgeführt werden; wird es keine bestimmten Wissenschaften geben, so werden die in der Logik gefundenen Lehren dennoch Gesetze des Denkens bleiben. Nur wenn das Denken keine von den Gegenständen unabhängigen apriorischen Gesetze hätte, wenn es keine Vernunft und kein Axiom der Vernunft gäbe, dann würde es auch keine Logik geben können. Dass es aber Vernunft, und mit ihr Gesetzmässigkeit des Denkens gebe, zeigt die Ausführung der Logik als einer wahren und wirklichen Methodenlehre. Die Vernunft ist nicht bloss Vernunft in Bezug auf bestimmte Erkenntnisse, oder auf einen gegebenen Stoff, sondern auch Vernunft in sich, unabhängig von den besondern Erkenntnissen, die auf sie bezogen werden mögen. Und dass die Logik, obgleich sie nur formell und allgemein ist, dennoch wichtige Aufschlüsse über das Wesen des wirklichen Denkens geben könne, wird aus ihren Lehren und Gesetzen aufs Deutlichste eingesehen. Denn z. B. die Operationen der Analogie,

der Induction, der Substitution und der Contradiction sind wirkliche, nicht bloss geforderte Operationen des Denkens, und kein Denken, das nicht die Bedingungen dieser Operationen erfüllte, würde ein wahres und wirkliches Denken sein können.

Die zweite Wissenschaft ist die Metaphysik, oder die Erfahrungswissenschaft im allgemeinen Sinne. Sie unterscheidet sich wesentlich von der Logik. Sie untersucht zwar das Nämliche, was die Logik untersucht, aber in ganz anderer Absicht. So ist z. B. die Sprache für die Logik ein Hilfsmittel des Denkens, aber für die Metaphysik ist sie eine Thatsache, die erklärt werden soll. Einen anderen wesentlichen Unterschied zwischen Logik und Metaphysik, als den Unterschied zwischen Wesen und Form, wird es allerdings nicht geben können, da diese beiden Wissenschaften das allgemeine Denken nach allgemeinen Gesetzen untersuchen.

Die Metaphysik hat die Frage da aufzunehmen, wo sie die *Wissenschafts-Lehre* gelassen hat. Sie hat nicht die Form, sondern das Wesen des Denkens zu bestimmen, sie hat den objectiven Hergang, die Thatsachen des wirklichen Denkens aufzudecken und zu erklären. Sie untersucht aber nur die allgemeine Wesenheit des Denkens, die Verbindungen der Begriffe im Allgemeinen, nicht die bestimmten Verbindungen bestimmter Begriffe; sie bleibt also eben so wie die Logik, allgemeine Vernunft-Wissenschaft, und hat eben so wenig, wie diese, besondere Zeichen und Symbole nöthig, um ihre Lehren klar und kurz und übersichtlich darstellen zu können. Symbole würden in ihr nicht nur überflüssig, sondern auch verwirrend sein, denn jedes Symbol muss darauf Anspruch machen, ein Zeichen einer *bestimmten* Verbindung von Begriffen zu sein; wo aber keine bestimmten Verbindungen untersucht werden, da können sie auch nicht durch Zeichen dargestellt werden. Diess würde mehr blenden als aufklären, mehr hindern als fördern.

Da die Metaphysik die Wirklichkeit des Denkens erklären

soll, so ist es unstreitig ihre Aufgabe, dass sie auch den zu erkennenden Gegenstand des Denkens, die Welt, als erkennbar nachweise, und nicht nur die Bedingungen, sondern auch die Thatsachen dieser Erkennbarkeit finde und aufstelle. Ihr letztes Resultat wird kein anderes sein können, als dass die Welt der wirkliche und wahre Gegenstand der Erkenntniss sei. Dass sie erkannt werden, wird die Wesenheit der Dinge sein.

Da nun alle Erkenntniss ein innerer Hergang im denkenden Geiste selbst ist, so wird die Metaphysik zu lehren haben, wie alle Objecte in das Innere des Denkens aufgenommen, gleichsam aus der Sprache der Wirklichkeit in die Sprache des Denkens übersetzt werden. Sie muss sich alles dessen, was in jeder Erkenntniss subjectiv ist, ganz und gar bewusst werden. Die Subjectivität des Wissens wird nicht dadurch umgangen, dass sie übersehen wird, sondern dadurch, dass wahrhaft gewürdigt wird, was Sache des Subjects sei. Wird diess erkannt, so wird auch eingesehen werden, was Sache des Objects sei, und was auf keine Weise durch das Subject ersetzt werden könne.

So bringt z. B. unstreitig das Denken selbst durch die Analogie und Contradiction Allgemeinheit und Nothwendigkeit in die Erkenntniss; aber Analogie und Contradiction bringen nicht Allgemeinheit und Nothwendigkeit schlechthin, sondern Allgemeinheit und Nothwendigkeit *der Erkenntniss*. Wird diess verwechselt, so wird die Folge davon ein Resultat sein, wie es die Kritik der reinen Vernunft aufgestellt hat, dass nämlich das Denken allein Allgemeinheit und Nothwendigkeit, der Stoff hingegen nur den Inhalt bringe, und dass wir nicht wissen, was die Dinge ausserhalb der Erfahrung und des Denkens, ausserhalb der ihnen durch das Denken angethanenen Formen der apriorischen Anschauungen und der apriorischen Begriffe sein mögen. Diess Resultat kann nicht angenommen werden, denn das Denken giebt sich zwar allerdings durch Analogie und Contradiction Allgemeinheit und Nothwendigkeit der *Erkennt-*

niss; (wären nicht Analogie und Contradiction wesentliche Operationen des Denkens, so würde sich ein allgemeines und nothwendiges Denken nicht geltend machen können); aber für die *Dinge* sind diese Operationen als solche nicht maassgebend. Es können nämlich sowohl die Dinge als das Denken Allgemeinheit und Nothwendigkeit für sich selbst haben oder nicht haben, und das Eine wird das Andere weder ersetzen noch ergänzen können. Vor aller Untersuchung werden folgende vier Fälle möglich sein:

1) Sowohl das Denken als die Dinge haben Allgemeinheit und Nothwendigkeit der Erkenntniss;

2) das Denken hat Allgemeinheit und Nothwendigkeit der Erkenntniss, aber die Dinge haben sie nicht;

3) die Dinge haben Allgemeinheit und Nothwendigkeit der Erkenntniss, aber das Denken hat sie nicht;

4) weder das Denken noch die Dinge haben Allgemeinheit und Nothwendigkeit der Erkenntniss.

Verwechselt man Subjectives und Objectives, so kann es kommen, dass man den letzten Satz als den einzig möglichen der vier Sätze nehme, und dass man an die übrigen drei Sätze gar nicht denke. Aus solcher Verwechslung wird aber Verwirrung und Unwissenheit hervorgehen müssen. Gerade dadurch, dass man weiss, was Sache des Subjects sei, überwindet man die Gefahr, dass man dasjenige für das Objective nehme, was subjectiv ist, und dass man hinwieder dasjenige als Sache des Subjects nehme, was Sache des Objects ist, und nur von ihm allein herrühren kann.

Die Metaphysik hat die Aufgabe, das Gebiet der gesammten menschlichen Erkenntnisse aufzunehmen und zu ordnen. Wenn sie auch bloss den andern Wissenschaften dient, so ist es doch der Mühe werth, diese Aufgabe anzunehmen und zu lösen. Ist es etwas Kleines, die Thatsachen der Erkenntniss aufzufinden, und den menschlichen Geist selbst zu erkennen? Und wenn in der Metaphysik nicht Erkenntniss auf rechte Art

gewonnen wird, so wird auch in den andern Wissenschaften das Letzte und allein Entscheidende nicht erkannt werden können.

Logik und Metaphysik sind die allgemeinen Vernunft-Wissenschaften. Sie geben Bildung überhaupt. Aber für die besondern Wissenschaften gewähren sie keine andern Vortheile, als die eben allgemeine Bildung giebt, und die ein sich selbst überlassener autodidactischer Zustand entbehren muss. Diejenigen Vernunft-Wissenschaften aber, welche allen Erfahrungs-Wissenschaften erst wahrhaft unter die Arme greifen, und alle Erkenntniss erleichtern und fördern, sind die *bestimmten* Vernunft-Wissenschaften, wie die Mathematik und die andern ihr coordinirten Vernunft-Wissenschaften sind. Sie allein können Erkenntniss im wahren Sinne geben, weil sie alle *bestimmten* Verbindungen der Begriffe untersuchen, die in den einzelnen Erfahrungs-Wissenschaften wahrgenommen oder vorausgesetzt werden.

Für die bestimmten drei Vernunft-Wissenschaften sind die vorausgehenden allgemeinen Vernunft-Wissenschaften axiomatisch, d. h. ihre Lehren werden in den besondern Wissenschaften nicht wieder aufs Neue bewiesen, sondern als bereits bewiesen angenommen und gebraucht. Es muss daher für sie auch die Metaphysik axiomatisch sein: und da in dieser Wissenschaft das Gesamtgebiet der menschlichen Erkenntnisse aufgenommen und geordnet wird, so werden die Axiome der einzelnen Vernunft-Wissenschaften aus der Metaphysik genommen werden können. Es wird daher die Beantwortung der Frage, wie die Axiome der einzelnen Vernunft-Wissenschaften gefunden werden, ausserordentlich leicht sein, wenn die Metaphysik ihrer Aufgabe vollkommen genügt hat. Die Axiome werden nämlich einfach aus der Metaphysik genommen werden. Ist aber die Metaphysik nicht vollkommen, wie sie es auch in der That noch lange nicht ist, so sind in den früheren Untersuchungen die Wege angedeutet worden, wie die Axiome der

besondern Vernunft - Wissenschaften gefunden werden können. Es werden die vorhandenen Erkenntnisse verglichen, und die ihnen allen zu Grunde liegenden, gemeinschaftlichen, Operationen herausgehoben. So werden zuerst mehrere besondere Axiome gefunden, und diese werden im Verlaufe der Wissenschaft in den allgemeinen Ausdruck des einen und wahren Axioms vereinigt. — Dass diess übrigens kein leichtes Geschäft sei, geht daraus hervor, dass ausser der Mathematik noch keine andere Vernunft - Wissenschaft ihr Axiom gefunden hat. Die Schwierigkeit liegt aber nicht sowohl in der Auffindung des Axioms, als in der Auffindung der jeder besondern Vernunft - Wissenschaft zu Grunde liegenden und sie auszeichnenden *bestimmten* Operation. Diese muss erst gefunden sein, ehe das Axiom aufgestellt werden kann.

Nun entsteht die Frage, wie viele besondere Vernunft - Wissenschaften möglich sein werden. Diese Frage ist sehr leicht zu beantworten. Es wird so viele besondere Vernunft - Wissenschaften geben, als es besondere Operationen und Axiome giebt. Schon die vorhandenen Erfahrungs - Wissenschaften geben Andeutungen über sie. Es giebt mathematische, naturhistorische und ethische Wissenschaften. In jeder dieser drei grossen Abtheilungen der menschlichen Erkenntnisse werden die Begriffe auf wesentlich andere, und verschieden bestimmte, Art verbunden und getrennt. Man kann z. B. die Operationen der Mathematik nicht auf naturhistorische oder ethische Gegenstände ausdehnen, wie bereits hinreichend auseinander gesetzt worden ist. Es wird daher *drei vorausgehende bestimmte Vernunft - Wissenschaften* geben müssen, welche das bestimmte Denken, das in den drei grossen Abtheilungen der Erfahrungs - Wissenschaften bewusst oder unbewusst ausgeübt wird, herausheben, ableiten, ordnen und beweisen, wie diess die Mathematik für das Gebiet der von ihr abhängigen Erfahrungs - Wissenschaften aufs Vollständigste und Beste geleistet hat und fortwährend leistet.

Es mag allerdings für uns beschämend sein, das Geständniss ablegen zu müssen, dass in den übrigen bestimmten Vernunft-Wissenschaften als solchen noch Nichts geleistet worden sei, nach so vielen Anstrengungen und im Verlaufe von so vielen Jahrhunderten. Allein es ist nicht unsere Aufgabe, diess Beschämende zu verhüllen, sondern aufzudecken; wir wollen viel mehr wirkliche Probleme geben, als scheinbare Auflösungen anbieten. Ein wahres Problem verlangt wenigstens seine Auflösung, und fordert die Wissenschaft auf, voranzuschreiten; eine scheinbare Auflösung hingegen wiegt in Schlaf ein, und hindert die Wissenschaft.

Jedenfalls ist es zu versuchen, ob ausser der Mathematik noch andere Vernunft-Wissenschaften möglich seien oder nicht. Die Mathematik giebt einen sicheren Anhaltspunkt; sie ist wirklich eine bestimmte Vernunft-Wissenschaft; ihre Operationen in Addition, Subtraction, Multiplication, Division &c. sind andere als die allgemeinen logischen und metaphysischen Operationen. Also wird sie entweder die einzige bestimmte Vernunft-Wissenschaft sein, oder es wird ausser ihr noch mehrere bestimmte Vernunft-Wissenschaften geben müssen. Dass wir wenigstens darüber in's Reine kommen, diess wird kein so schweres Geschäft sein können. Thatsache ist, dass die Mathematik nur ein bestimmtes erstes Gebiet der Erfahrung beherrsche, nicht aber alle Gebiete der Erfahrung. Für das zweite und dritte Gebiet der Erfahrung wird es daher eine zweite und dritte bestimmte Vernunft-Wissenschaft geben müssen, oder nicht. Ist Letzteres der Fall, so wird in den naturhistorischen und ethischen Wissenschaften nichts wahrhaft erkannt werden können. Denn die wahre Erkenntniss besteht in einer bestimmten Verbindung von bestimmten Begriffen. — Findet daher wahre Erkenntniss statt, so werden auch ihre bestimmten Verbindungen als *bestimmte Operationen* herausgehoben und an die Spitze der allbeherrschenden Vernunft-Wissenschaften gestellt werden können. Dass aber in allen Gebieten der Erfahrung wirkliche Erkenntniss

möglich sei, dafür bürgen die einzelnen naturhistorischen und ethischen Wissenschaften. Man wird daher auch die Analysis, die Vernunft-Wissenschaft, jedes dieser Gebiete suchen und finden können. Und hierin kann ihnen die Mathematik als Vorbild dienen; die Erfahrungen, die in ihr gemacht worden sind, werden ihnen von wesentlichem Nutzen sein können. Die übrigen Vernunft-Wissenschaften werden an Reinheit, Allgemeinheit und Nothwendigkeit der Erkenntnisse wenigstens nicht *unter* der Mathematik stehen bleiben dürfen.

Es wird für das Allgemeine der Wissenschaft nicht gleichgültig sein, ob man sich über diese Fragen bestimmte Antworten bilde oder nicht. Bleibt man darüber im Unbestimmten und Unklaren, so wird unwillkürlich einer der drei folgenden Zustände eintreten müssen:

1) Der falsche philosophische Zustand. Man wird das Logische und Metaphysische für alles Erkennbare ansehen, und zu keinem *bestimmten* Denken, zu keiner bestimmten Verbindung der Begriffe voranschreiten, ja diese für unmöglich halten. Ein solcher Zustand wird nicht lange dauern können; die Mathematik und die Erfahrungs-Wissenschaften werden es hindern, denn sie gehen alle über das bloss Logische und Metaphysische hinaus.

2) Es kann auch der Zustand eintreten, dass man die Mathematik als erkannte Vernunft-Wissenschaft über Alles ausbreiten wolle. Man wird aber ausserhalb des bestimmten mathematischen Gebietes nichts finden können. Die gänzliche Erfolglosigkeit solcher Bemühungen setzt ihnen ein frühes und natürliches Ziel.

3) Man kann über den Fortschritten der Mathematik und der Erfahrungs-Wissenschaften die übrigen Vernunft-Wissenschaften übersehen, und gänzlich verachten. Diess hat in ganzen Ländern den Sinn für die Tiefe der Erkenntniss ausgerottet. Und nur das geheime, unbewusste Streben nach der zweiten und dritten Vernunft-Wissenschaft hat in Deutschland

die Philosophie als Philosophie erhalten. Aber ein bloss unbewusstes Streben, eine Philosophie ohne bestimmtes Ziel kann es nicht so beginnen, dass sie etwas wahrhaft Wissenswürdiges finde, oder dass sie überhaupt nur achtungswerth sei. und als solche von den wirklichen Erfahrungs-Wissenschaften anerkannt werde. —

Eine ähnliche Aufeinanderfolge der Wissenschaften, wie in den drei Vernunft - Wissenschaften angegeben wurde, ist öfter versucht worden, und wir halten es für ein Glück, dass nichts Neues in Vorschlag gebracht wird. So hat z. B. *Kant* die Vernunft - Wissenschaft in die Beantwortung der drei Fragen gesetzt:

- 1) Wie ist die *reine* Mathematik möglich?
- 2) Wie ist die *reine* Natur-Wissenschaft möglich?
- 3) Wie ist die *reine* Metaphysik (Ethik) möglich?

Kant lehrt, dass die reine Mathematik durch die apriorischen Anschauungen von Raum und Zeit möglich sei. Sind diess etwa die Kategorieen der Mathematik? Wir bezweifeln es. Die Kategorieen der Mathematik sind ihre bestimmten Operationen; und gerade hier hat *Kant* sein Möglichstes gethan, das *Bestimmte*, dieses *Mehr* als bloss Logische, das zu dem allgemeinen Denken noch Hinzukommende, zu *verhüllen*, und dasjenige, was die Mathematik Ausgezeichnetes und Bestimmtes hat, zu *verdecken* oder zu *lügen*. Mathematik ist überhaupt möglich, wie jede andere Wissenschaft möglich ist, einmal durch die subjectiven Gesetze des Denkens, wie sie auseinander-gesetzt und erläutert worden sind, und dann durch die objective Erkennbarkeit des Gegenstandes, wie sie im Axiome voraus-gesetzt, und in der Metaphysik bewiesen werden muss. Insbesondere ist aber die Mathematik dadurch als Wissenschaft möglich, dass sie eine besondere, bestimmte *Verbindung ihrer Begriffe* hat, und sie als die Operation der Addition auszeichnet und ausführt.

Welches sind nach *Kant* die Kategorieen der reinen Natur-Wissenschaft? Wir werden in ihnen irgend einen Anhaltspunkt

finden können. Sie sind: a) *Urtheile*, (in Beziehung auf Quantität, Qualität, Relation, Modalität); b) *Verstandesbegriffe*, (in Beziehung auf Quantität, Qualität, Relation, Modalität); c) *Grundsätze* (in Beziehung auf Quantität (Axiome) in Beziehung auf Qualität (Anticipationen), in Beziehung auf Relation (Analogieen), in Beziehung auf Modalität, (Postulate.)

Ueber ein solches Resultat darf man einigermaßen erstaunt sein, wenn man Kategorieen sucht, die den mathematischen Kategorieen, den *bestimmten* Operationen entsprechen sollen. Hier ist alles auf das rein Logische zurückgebracht, ja es ist gerade dasjenige mit Entschiedenheit aufgehoben und weggenommen, was allein die Natur-Wissenschaft zu einer *bestimmten* Vernunft-Wissenschaft machen kann, die *bestimmten Operationen*, die über das bloss Logische und Metaphysische hinausgehen sollen und müssen. Dass in solchen Kategorieen keine Anhaltspunkte für eine bestimmte Vernunft-Wissenschaft gegeben seien, ist ganz und gar einleuchtend.

Welche Fortschritte sind nun seit dieser Zeit gemacht worden, als die freie Bewegung in diese starren Formeln gekommen ist? Gar keine. — *Kant* hat die Formeln aufgestellt, und mit einigen Worten, die Beweise sein sollten, begleitet oder ausgestattet. Man hat dann ohne Weiteres angenommen, dass das von *Kant* Aufgestellte das Richtige sei, nur die begleitenden Worte mussten verändert und anders gemacht werden. Es kam darauf an, wie man sich in diesen Worten gegenseitig überbieten könne. — So ist der kritische Sinn erstorben, und es ist gekommen, dass man in der Philosophie das gar nicht ahnte und inne wurde, was man in wirklichen Wissenschaften als *materielle* Fortschritte, als wahrhafte Bereicherungen des Systems mit neuen Lehrsätzen und Abschnitten kennen lernte und willkommen hiess. Ja man suchte sie nicht einmal, die materiellen Fortschritte; man suchte nur die formellen Fortschritte auf den vorhandenen Grundlagen; ob aber diese selbst richtig oder unrichtig, vernünftig oder unvernünftig

seien, diess wurde nicht weiter in Frage gestellt. Wenn nur das erreicht wird, was *Kant* als unerreichbar hingestellt hat, dann ist Alles gewonnen, dachte man fortan in der Philosophie. Was man aber haben würde, wenn man es wirklich erreichte, was *Kant* nicht erreicht hatte, wurde nicht untersucht; es wurde auf Treue und Glauben angenommen, dass die von *Kant* aufgestellten Probleme *als Probleme* richtig aufgestellt worden seien, die man sofort nur aufzulösen brauche.—Und doch sind es die materiellen Bereicherungen der Wissenschaft allein, die uns wahre Befriedigung und reinen dauernden Genuss der Erkenntniss geben können. Das Formelle ist zwar auch von Wichtigkeit; aber nur dann, wenn die materiellen Grundlagen des formellen Fortschrittes richtig und wahr sind. Ausserdem haben sie nur einen sehr geringen Werth.

Um auf die besondern Vernunft-Wissenschaften zurückzukommen, so haben wir in früheren Untersuchungen aufs Bestimmteste eingesehen, dass jede derselben ihre eigenthümlichen *Operationen*, also auch ihre eigenthümlichen *Zeichen* haben müsse. Keine darf der andern feindlich in ihr Gebiet fallen, und ihr etwa ihre Zeichen nehmen und für sich gebrauchen. Diess würde später die grösste Verwirrung herbeiführen müssen, da jedes Zeichen nur für eine bestimmte Operation einer Wissenschaft und nicht für verschiedene Operationen verschiedener Wissenschaften gelten kann.—Anfänglich werden Definitionen, dann abgekürzte Symbole und endlich unvermerkt die wahren analytischen Zeichen kommen. Für die Natur-Wissenschaft wird diess nicht schwer sein, sie ist bereits auf dem Wege, ihre Zeichen zu bestimmen; schwerer wird es für die Geistes-Wissenschaft sein. Denn ihre Gegenstände können nicht entfernt in Bildern gegeben werden. Aber die wahren analytischen Zeichen sind auch nicht Bilder oder Abkürzungen von Bildern, sie sind Abkürzungen von Worten, wie z. B. $\log. x$, $\sin. x$ &c.; und solche Zeichen werden auch für die bestimmten Operationen, in denen die geistigen Gegenstände verbunden werden, immerhin möglich sein.

Giebt es nun drei coordinirte bestimmte Vernunft-Wissenschaften, so wird auch begreiflich, warum von jeher in der Philosophie so höchst sonderbar über die Mathematik geurtheilt worden sei. Sie war die bewegliche fortschreitende Sonne, die nicht zum Stillstand gebracht werden konnte. Logik und Metaphysik war sie nicht, denn sonst hätten Logik und Metaphysik zu ihrem Verständnisse hinreichend und befähigend sein müssen. Bestimmte Vernunft - Wissenschaft konnte sie nicht sein, denn an diese hatte man noch nicht gedacht, die übrigen ihr coordinirten Vernunft-Wissenschaften waren als solche nicht erkannt; und Erfahrungs - Wissenschaft war sie wieder nicht, das konnte Jeder leicht errathen. Was war sie also? Das Unbegriffene.

Sind die besondern Vernunft-Wissenschaften unbekannt und unbeachtet, und wirken sie dennoch in allen bestimmten Operationen unsers Denkens, so ist leicht abzusehen, dass sie bei solch einem unbewussten Gebrauche nicht streng von einander geschieden und auseinander gehalten werden können. Diese Verwechslung und Vermischung wird eine schreckliche Last für das Denken selbst. Ohne ihre bestimmteste Unterscheidung und Trennung wird schlechterdings nichts Erhebliches geleistet werden können. Denn was man nach dem einen (unbewussten) Schema der einen Vernunft - Wissenschaft verbindet, das lös't man nach dem andern (ebenfalls unbewussten) Schema einer andern Vernunft - Wissenschaft wieder auf. Es ist Penelope's Spiel, aber ohne Ziel und Absicht. Was in der einen Vernunft-Wissenschaft bewiesen werden kann, das muss auch in ihr bewiesen werden; es kann zu Nichts führen, wenn man es in andern Wissenschaften beweisen will, zumal wenn man die Mittel nicht hat, aus denen die Beweise geführt werden können. Es ist gerade so, als wenn mitten in der *Metaphysik* die *Hya-cinthe* betrachtet und analysirt wird, was wirklich geschehen ist. Aber es ist in einer Art geschehen, als ob es noch gar keine naturhistorischen Wissenschaften gäbe; Alles, was in ihnen

Hohes, Vortreffliches, Allgemeines geleistet worden ist, wurde übergangen, es wurde auf's Unbestimmte hin geredet, ohne alle Ahnungen der Wahrheiten, die bereits in den Natur-Wissenschaften bekannt, und auf's Beste bewiesen sind. So wird man freilich Wissenschaft in ein Spiel verwandeln können.

Die Vernunft-Wissenschaften müssen auf's Strengste unterschieden werden; ja sie müssen einzeln in ihrem Gebiete so ausschliesslich walten, als wäre jede die einzige, weltbeherrschende Wissenschaft. So nur wird alles Einzelne vollkommen elementar erkannt werden können. — In ihrer endlichen Verbindung werden sie sich gegenseitig vereinen und bestimmen, und diese Vereinigung, diese *Composition* im edlen Style, ist eben dem Elementaren der Vernunft-Wissenschaften gegenüber das *Positive* der Welt und der Wissenschaft. Sind einmal die Elemente, wie sie einzeln für sich sind, erkannt, so wird auch ihre Zusammensetzung, und ihr Wesen, das sie in dieser Zusammensetzung haben, erkannt und erklärt werden können. Sind aber die Elemente unerkannt, so wird es auch nicht möglich sein, dass das Zusammengesetzte und Positive erkannt werde.

Die besondern Vernunft-Wissenschaften sind eine Ausrüstung, Bewaffnung des Geistes. Wir sollen gerüstet den erkennbaren Gebieten der Welt entgegen gehen. Oder sollen wir immer Kinder bleiben? Soll Jeder wieder von Vorne beginnen, und auf's Neue mit allen Schwierigkeiten kämpfen müssen, die doch recht gut ein für allemal überwunden werden können? Sollen wir immer mit der ersten anfänglichen Unbehüllichkeit den wirklichen Problemen, dem wirklich Erkennungswürdigen und Erfahrbaren der Welt gegenüber treten? Hier muss zwischen allgemeiner Vernunft und allgemeiner Erfahrung etwas in der Mitte liegen, was uns Reife des Geistes bringt; es muss das wahrhaft Lehrbare und Lernbare sein. In Diesem müssen wir erstarken, dass wir den wirklichen Problemen des Lebens gewachsen werden, dass wir einsehen lernen, was in ihnen das

Erkennbare sei, und wie es erkannt werden könne. Die wirklichen Probleme drängen sich jederzeit an uns heran; der Unterschied ist nur, ob wir ihnen unbehülflich oder stark, mittellos oder bewaffnet entgegengehen. So wie Derjenige, der mathematische Erkenntniss hat, das mathematisch erfahrbare Gebiet der Welt mit ganz anderer Zuversicht betritt, als derjenige, der die Mathematik nicht kennt, und wie er mit ganz anderem Erfolge die wirklichen Probleme in wahre Erkenntnisse umwandelt, da ihn die Wissenschaft zu diesem Werke ausgerüstet hat, so wird Jeder, der die übrigen bestimmten Vernunft-Wissenschaften auf die rechte Weise hat, eben so ausgerüstet, die wirklichen Probleme mit ganz anderer Zuversicht aufnehmen, als der Ungeweihte, der durch keine Wissenschaft befähigt und ausgerüstet ist. Er weiss, wie die Schwierigkeiten gesucht, gefunden und überwunden werden, während ihnen der Unwissende muthlos und hilflos gegenübersteht, und nicht weiss, wie er die Schwierigkeiten nur aufnehmen, geschweige denn überwinden könne.

Diess ist der Erfolg der bestimmten Vernunft-Wissenschaften, dass sie uns nicht bloss mit allgemeiner Bildung ausrüsten, sondern uns auch geschickt machen, im Einzelnen, Bestimmten, Wirklichen Alles zu erkennen; dass sie uns lehren, wie die Schwierigkeiten angegriffen und zur Freude des Wissens überwunden werden können. In diesen Wissenschaften ist wahrhafte Lehre und Ueberlieferung möglich; Schwierigkeiten, die einmal überwunden sind, sind für alle Zeiten überwunden, und die Erkenntnisse werden fortwährend erweitert und bereichert werden können.

Noch ist eine Frage von Wichtigkeit zu erörtern. Wie kann es dann kommen, dass wir in jeder bestimmten Vernunft-Wissenschaft mehrere Operationen aufstellen und aufstellen müssen, um zum Ziele gelangen zu können, da doch in der Wirklichkeit in jedem Vernunft-Gebiete nur eine einzige Operation und Verbindung der Dinge statt finden kann, denn die

Einheit dieser Verbindung bildet die Einheit dieses Gebiets? — Wie kann denn z. B. die Mathematik als Wissenschaft ausser der Operation der Addition noch die Operationen der Multiplication, der Potenzirung, der Logarithmirung u. s. w. haben, während doch in der Wirklichkeit alle mathematischen d. h. der Mathematik unterworfenen Gegenstände nur allein durch die Operation der *Addition* verbunden sein können, so dass ausser der Addition keine andere Operation eine wirkliche und natürliche Operation sein kann? — Diese Frage wird leicht beantwortet werden können. Zuerst sind die verschiedenen Operationen einer Vernunft-Wissenschaft nicht in der Art verschieden, dass sie nicht auf eine einzige wirkliche Operation zurückgebracht werden könnten; sie sind nur Abkürzungen, Verinnerlichungen der ersten Operation, und geben in einem einzigen endlichen Ausdrucke, was nur durch unendlich viele erste Operationen gegeben werden könnte. Dann finden auch in der Wirklichkeit *beliebig viele* Ausgangspunkte statt, die alle zu demselben Resultate zusammenwirken, während das Denken immer nur einen einzigen Ausgangspunkt aus sich selber hat. Das Denken muss sich daher, damit es den vielen Ausgangspunkten gewachsen sein könne, in *energischen* Operationen concentriren. Untersuchen wir z. B. die Bewegung *eines* Planeten um die Sonne. In der Wirklichkeit werden hier allerdings nur Additionen der Zeit, Additionen der Entfernungen des Planeten von der Sonne, und Additionen (Fortsetzungen) der Bewegung nach den Gesetzen der *vis inertiae* stattfinden. Das Resultat dieser Additionen wird die Geschwindigkeit, Lage und Entfernung des Planeten im nächsten Augenblicke sein. Dann setzen sich die nämlichen Additionen wieder fort u. s. w. bis ins Unendliche; in jedem Augenblicke finden diese Additionen wieder statt. Es wirken also zum *Ganzen* der Bewegung in unzählig vielen Ausgangspunkten unzählig viele Wirkungen zusammen, jede in einfachen, addirenden Operationen. Das Denken aber hat nicht unzählig viele Ausgangspunkte, sondern nur

einen einzigen von sich selber; und es ist natürlich, dass das Denken durch concentrirte Operationen den Mangel der unzählig vielen Ausgangspunkte zu ersetzen sucht. Denn es ist darauf angewiesen, die unendlich vielen verschiedenen Resultate aller Ausgangspunkte, von einem einzigen Ausgangspunkte aus zu erreichen und zu umfassen. Dadurch, dass das Denken nur einen einzigen Ausgangspunkt hat, ist es nothwendig auf das Allgemeine hingewiesen; das Denken muss daher allgemeine Operationen bilden und definiren, welche unendlich viele einfache Operationen einschliessen. Diess sind die *Urfunctionen* in der Mathematik, die wissenschaftlich selbst als einfache Operationen erklärt und definirt werden. So geschieht es, dass durch wenige concentrirte Operationen die Vielheit und Allheit der wirklichen Ausgangspunkte ersetzt und umfasst wird. Ja diese concentrirten Operationen der Wissenschaft sind der Verstand und das Verständniss der unendlich vielen Operationen der Wirklichkeit; und wird die Welt als durch Verstand geordnet und geschaffen betrachtet, so müssen diesem *ersten Verstande* sowohl die vielen wirklichen einfachen Operationen der ersten Ausgangspunkte, als auch die allgemeinen durch Denken gefundenen, umfassenden und begreifenden Operationen zugeschrieben werden. Denn beide sind verwirklicht, und beide müssen beabsichtigt gewesen sein, und sie können auch entweder durch Auflösung oder durch Concentrirung gegenseitig in einander übergehen.

Verfolgen wir das frühere Beispiel noch weiter, und setzen wir den Fall, dass sich nicht ein Planet allein, sondern dass sich mehrere Planeten in beliebiger Entfernung von einander um die Sonne bewegen, so ist jeder Planet sowohl für die Sonne, als auch für die andern Planeten ein neuer Ausgangspunkt der Additionen in Zeit, Bewegung, Entfernung u. s. w., von einem Augenblicke zum andern. Die Resultate werden verwickelter; es müssen daher auch concentrirtere allgemeine Operationen in Anwendung kommen, damit die unzählig vielen

wirklichen Operationen in einen einzigen Ausdruck zusammengefasst werden können. *La Place* sagt, die Natur mache sich eben so wenig aus den allerschwersten wie aus den allerleichtesten Verbindungen. Diess ist sehr leicht zu begreifen. In der Wirklichkeit sind alle Verbindungen einfach und leicht. Nur die Zusammensetzungen und Anhäufungen dieser Verbindungen können Schwierigkeiten herbeiführen; aber jede einzelne für sich wird einfach und leicht sein. Wird also die Wissenschaft etwa nicht der Natur adäquat sein können? Doch; denn es werden auch in der Wissenschaft die vielen Operationen auf eine einzige allgemeine Operation zurückgebracht. Das Denken bewaffnet sich aber in einem Systeme, damit es von einem Ausgangspunkte aus, und mit endlichem Denken Unendlich-Scheinendes erreichen und begreifen könne.

Eine sich selbst überlassene Vernunft müsste durch solche Schwierigkeiten abgeschreckt werden. Nicht aber die durch Wissenschaft bewaffnete Vernunft. Sie ist den Schwierigkeiten gewachsen, sie weiss sie zu elementarisiren, und sowohl aus dem Allgemeinen das Einzelne, als aus dem Einzelnen das Allgemeine zu finden und zu begreifen. Würde aber die Vernunft, ohne vorher durch Wissenschaft gestählt worden zu sein, diese Schwierigkeiten in den einzelnen Erfahrungs-Wissenschaften angegriffen haben, so hätte sie unstreitig unterliegen müssen, und das allgemeine Lösungswort wäre gewesen: diess ist unbegreiflich, diess übersteigt die Vernunft, diess wird niemals gelöst werden können. — Gerade so verhält es sich aber in unsrer Zeit mit den Fragen über das Leben der Natur, oder mit den Fragen über Geist, Wille, Freiheit u. s. w. Wenn in diesen Gebieten einmal die Vernunft durch Wissenschaft gestählt sein wird, so werden die unauflöslich scheinenden Schwierigkeiten eben so muthig angegriffen und überwunden werden, wie die Schwierigkeiten des mathematischen Gebiets überwunden worden sind. Man kann von der Mathematik mit Recht behaupten, dass es für sie keine ob-

jectiven Schwierigkeiten mehr gebe. Hätte man aber z. B. vor der Erfindung des Differenzial- und Integral-Calculs, eine vollständige Theorie der *Störungen* zu geben versuchen wollen, wie würden da Alle ausgerufen haben: Zurück! diess geht über allen Verstand. Nun ist aber die Mathematik aus sich selber gross geworden, sie durchschaut das Zusammengesetzteste wie das Einfachste; es sind stille Forscher erstanden, die gezeigt haben, dass diese Gesetze nicht über ihren Verstand gehen. So wird man auch einst über die Fragen der beiden andern Vernunftwissenschaften denken, Fragen, die uns jetzt aber so unmöglich zu lösen sind, wie jene astronomischen Fragen den Alten unmöglich zu lösen waren.

Dass aber die spätern, concentrirten Operationen allgemein eine unendliche Anzahl anderer Operationen umfassen, und doch *einfache* Operationen seien, diess geht aus allen bekannten Formeln auf's deutlichste hervor; so ist z. B.

$$\log. \text{nat. } (x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$$

Es umfasst daher die einzige Logarithmirung unzählig viele Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Potenzirungen. — Und dass hingegen die Addition allein in allen mathematischen Problemen die *wirkliche* Operation sei, wird durch die Wissenschaft selbst bewiesen, die in ihrem dritten (arithmetischen) Gebiete alle analytischen, geometrischen und mechanischen Resultate in lauter *Additionen* von Zahlen giebt und verständlich macht. — Und so findet auch diese Frage ihre Erledigung, warum in einer Wissenschaft nur eine einzige *wirkliche* Operation sein könne, und warum sie in mehreren aufeinanderfolgenden *abgekürzten* und *concentrirten* Operationen gegliedert werden müsse, die dann wieder im letzten (arithmetischen) Gebiete in der ursprünglichen Operation (der Addition) gegeben werden, so dass Wissenschaft und Wirklichkeit in schönster und wahrster Uebereinstimmung mit einander stehen, wie es auch wünschenswerth und nothwendig ist.

Vierzehnte Untersuchung.

Schluss der vorhergehenden Untersuchung.

Noch ist Einiges über die Erfahrungs-Wissenschaften zu sagen. In ihnen vereinigen sich die Erfahrungen und die Beweise der Vernunft-Wissenschaften, damit das wahrhaft Wissenswürdige erreicht werde. Würden die Erfahrungen fehlen, so würden die Wissenschaften leer und inhaltslos bleiben; würden aber die Beweise fehlen, so würden die Erfahrungswissenschaften unbehülflich bleiben. Denn Stärke, Kraft, Wahrheit können nur aus den Vernunft-Wissenschaften kommen, da sie allein die wahren Beweise und den männlichen Schritt der Methode geben können.

Die Erfahrungs-Wissenschaften sind zusammengesetzte Wissenschaften, und nicht so einfach und elementar, wie die Vernunft-Wissenschaften. Ihre ersten Thatfachen müssen also auch zusammengesetzter sein, als die Axiome der Vernunftwissenschaften; diese werden in ihnen nur als Elemente enthalten sein können. Denn die Axiome umfassen nur die Operationen des Denkens, nicht aber auch die Eigenthümlichkeiten der einzelnen Erfahrungsgebiete. Es entsteht nun die Frage, ob die Thatfachen schon bei dem Beginne der Erfahrungs-Wissenschaften als Thatfachen aufgestellt werden können oder nicht? Diese Frage hat grosse Aehnlichkeit mit einer früheren Frage, ob nämlich bei dem Beginne

der Vernunftwissenschaften ihre Thatsachen schon als Thatsachen aufgestellt werden können. Wir haben gefunden, dass diess keineswegs der Fall sei, sondern dass sie vielmehr als Axiome aufgestellt werden müssen. Auf diese Weise werden auch in den Erfahrungs-Wissenschaften die Thatsachen anfangs nicht als Thatsachen, sondern nur als Hypothesen aufgestellt werden können. Die Hypothesen werden bei dem ferneren Wachstume der Wissenschaften erprobt und berichtigt, bis sie endlich allen Aufgaben dieser Wissenschaften gewachsen sein werden. Dann erst können sie als Thatsachen ausgesprochen werden; denn eine wahre Thatsache ist nur diejenige, welche alle Schwierigkeiten lösen und erklären kann. Diesen Weg haben die physikalischen Wissenschaften eingeschlagen, und sind gross geworden. — Jede Hypothese ist ein erster Versuch, von den einzelnen Bruchstücken zu einem Ganzen überzugehen; und alle Erfahrungs-Wissenschaften werden diesen Weg einschlagen müssen, wenn sie von den blossen Vorübungen zu den wirklichen Erklärungen übergehen wollen. Auch hier muss sich das Denken anfangs für die Dinge selbst einsetzen, damit endlich die objective Wahrheit gewonnen werden könne. Und nur, wenn wir uns dessen ausdrücklich bewusst werden, dass wir in den Hypothesen blosse Voraussetzungen statt der Thatsachen aufstellen, werden wir sicher sein, dass wir nicht irgend eine falsche Voraussetzung unbewusst für eine wahre Thatsache hingenommen haben.

Weit entfernt, dass die Hypothesen eine Wissenschaft erniedrigen werden, so werden sie vielmehr jede Wissenschaft erhöhen. Nur sehr weit vorgeschrittene Wissenschaften, wie z. B. die Lehre von der allgemeinen Gravitation, die Lehre vom Lichte u. s. w. vertragen eine ernstliche Aufstellung der Hypothesen; Wissenschaften hingegen, die noch nicht über die ersten Wahrnehmungen hinausgekommen sind, sind schlechterdings nicht im Stande, Hypothesen aufzustellen. Denn ehe diese aufgestellt werden können, muss von dem unbestimmten Denken zum bestimmten Denken, zur bestimmten Verbindung bestimmter Begriffe übergegangen

worden sein, es müssen die Operationen bekannt sein, in denen diese Begriffe verbunden werden, und diess ist nicht ein kleiner, sondern ein sehr grosser und entscheidender Schritt in jeder Wissenschaft.

Daraus ergeben sich die Kriterien für die Aufstellung und Unterscheidung der guten und brauchbaren Hypothesen. Es können nur solche Hypothesen aufgestellt werden, die den bestimmten Operationen einer Wissenschaft nicht widersprechen, und die alle bekannten Erfahrungen dieser Wissenschaft umfassen und erklären. Erprobt werden dann die Hypothesen dadurch, dass sie durch jede neue Erfahrung bestätigt und gefördert werden, während umgekehrt eine schlechte Hypothese durch jede neue Entdeckung genöthigt wird, sich entweder selbst zu verändern, und von beschränkten Ansichten zu freieren und allgemeineren Ansichten überzugehen, oder aber die That-
sache zu verändern und zu entstellen; was auch öfter im Streite der Systeme der Fall gewesen ist.

Die letzte und entscheidende Probe einer wahren Hypothese ist endlich, dass in ihren Erklärungen nur solche Operationen enthalten sein dürfen, welche als die ersten und wirklichen Operationen eines Vernunftgebietes erkannt worden sind. So dürfen in den Hypothesen einer Wissenschaft, welche z. B. den mathematischen Gesetzen unterworfen ist, nur Additionen oder Subtractionen enthalten sein. Jede wahre Hypothese muss Anspruch darauf machen, dass sie durch diese wirklichen Operationen alle Erfahrungen, sie mögen noch so schwierig und zusammengesetzt sein, auf das Genügendste erklären könne. Aus diesem Grunde wird die *Newton'sche* Gravitationstheorie den *Kepler'schen* Gesetzen mit Recht vorgezogen. Diese sind nur eine Folge der *Newton'schen* Gravitationstheorie, die der ursprünglichen und wirklichen Wahrheit am Nächsten liegt. Sie ist im Stande, durch die wirkliche Operation der Addition Alles zu erklären. Die *Kepler'schen* Gesetze sind schon mehr zusammengesetzte Erscheinungen.

Es ist einleuchtend, dass, wenn die Hypothesen einmal bis zu diesem Punkte vereinfacht sind, dass aus der ersten wirklichen Operation einer Vernunft-Wissenschaft alle Erfahrungen eines Vernunft-Gebietes erklärt werden können, (eine Vereinfachung, die übrigens schwieriger ist, als sie auf dem ersten Blicke scheinen mag,) dass sie nicht mehr ferne von der Wahrheit sein werde. Denn auf dieser Spitze drängt sich Alles zu einer raschen Entscheidung. Es ist keine grosse Wahl mehr übrig zwischen vielen Möglichkeiten, und die kleinste Abweichung der Hypothese von der wirklichen Thatsache müsste in den Erklärungen der zusammengesetzteren Erfahrungen so auffallend werden, dass man über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit einer Hypothese nicht lange mehr zweifelhaft bleiben könnte.

Wenn aber von den Hypothesen begonnen wird, so entsteht die Schwierigkeit, wie man von den Hypothesen wieder hinwegkommen und zu den substantziellen Wahrheiten gelangen werde. Dieser Uebergang zu den wirklichen Lehren und Thatsachen einer Wissenschaft wird auf folgende Art stattfinden können. Zuerst werden die Hypothesen nach den oben angegebenen Kriterien erprobt. Jede neue Entdeckung wird eine wahre Hypothese bewähren, und verstärken. Gesetzt nun, dass dieser endliche Zustand erreicht worden sei, und dass durch eine Hypothese alle Erfahrungen eines wissenschaftlichen Gebietes aufs Beste und Einfachste erklärt und verstanden, und nicht bloss verstanden, sondern sogar divinirt werden können, (ein Zustand, der in den Lehren der allgemeinen Gravitation, und in den Lehren der Optik in Bezug auf die Vibrations-Hypothese wirklich eingetreten ist.) so sind die Hypothesen ihrem Ursprunge nach allerdings Hypothesen, aber ihrem Wesen nach sind sie Thatsachen. Jede Hypothese, wenn sie diese Prüfung durch Erfahrung aushalten soll, muss wahre Thatsache sein. Nur kann sie am Anfange nicht als Thatsache, sondern nur als Hypothese aufgestellt werden.

Warum aber werden nicht sogleich Thatsachen aufgestellt, sondern blosse Hypothesen, die doch nur immer Surrogate für

die Thatsachen sein können? Die Antwort auf diese Frage wird dieselbe sein, wie die Antwort auf die Frage bei den Vernunft-Wissenschaften, warum anfangs nur Axiome und nicht sogleich Thatsachen aufgestellt werden. Thatsachen, wenn sie sogleich als Thatsachen aufgestellt werden, sind gleich den unmittelbaren Wahrheiten, *träge* Theile einer Wissenschaft, und können weder zur weiteren Forschung führen, noch viel weniger zum Aufbau einer ganzen Wissenschaft beitragen. Werden aber Hypothesen ausdrücklich als Hypothesen aufgestellt, dann nöthigen sie zur weiteren Forschung, denn sie müssen erprobt und bewährt werden; es darf keine Erfahrung und keine Schwierigkeit übrig bleiben, die durch sie nicht gehoben und erklärt werden könnte. — Und endlich, wie kann man eine Thatsache *vor* der Erkenntniss und *vor* der Wissenschaft als Thatsache haben, wenn man sich nicht absichtlich täuschen will? Die wahren, ganze Erfahrungsgebiete erklärenden Thatsachen sind das Verborgenste; sie werden nicht am Anfange, sondern am Ende der Wissenschaft gefunden und erkannt. Anfangs kann man die *Thatsachen* zwar als *Hypothesen* haben (und die Hypothesen müssen die Thatsachen enthalten, wenn sie in der nachfolgenden Prüfung bewährt werden sollen), aber man kann anfangs noch nicht beweisen, dass man in den Hypothesen die Thatsachen habe. Die Forderung, dass man diess endlich beweisen soll, führt zur Forschung und Erprobung, also zur Wissenschaft, während der unbegründete Wahn, dass man am Anfange sogleich die ganze Thatsache habe, von der Wissenschaft abführt. Thatsachen lassen sich nicht abändern und umbilden, wohl aber Hypothesen, bis ihr Ausdruck dem Ausdrücke der Thatsachen vollständig adäquat geworden ist.

Wenn man endlich bedenkt, dass die wahren Thatsachen einer Wissenschaft das Einfachste in ihr sein müssen, und dass sie durch die ersten, *wirklichen* Operationen dieser Wissenschaft (z. B. in allen von der Mathematik abhängigen Wissenschaften durch die Additionen) alle Erfahrungen erklären und

beweisen müssen, wie sie auch alle diese Erfahrungen wirklich bedingen, so wird ganz einleuchtend, dass diese Thatsachen niemals unmittelbar, d. h. am Anfange einer Wissenschaft erfahren werden können. Alle wirklichen Erfahrungen sind schon mehr zusammengesetzt, und sie haben wohl den *allgemeinen* Zusammenhang, dass sie zu derselben Wissenschaft gehören, aber nicht den *bestimmten* Zusammenhang der Operationen, durch die sie verbunden und erklärt werden. Dieser bestimmte Zusammenhang wird erst gesucht, und muss apriorisch, d. h. hypothetisch aufgestellt werden. Die Hypothese wird dann erprobt, ob sie diesen Zusammenhang wirklich erklären könne, oder nicht.

Zwar könnte es scheinen, dass diese Hypothese auch am Ende der Wissenschaft aus allen Erfahrungen als Thatsache abgeleitet und ausgesprochen werden könne. Allein was sind denn alle Erfahrungen einer Wissenschaft? Doch nur die wenigen Erfahrungen, die man zufällig gemacht hat, und die man so gerne für *alle* Erfahrungen ausgeben will. Aus *wenigen* Erfahrungen können aber wissenschaftlich nur Hypothesen nicht Thatsachen abgeleitet werden. Und damit alle nothwendigen Erfahrungen gemacht und aufgesucht werden können, wird mit Hypothesen begonnen, die ihrer Natur nach ein Uebergang von einzelnen Bruchstücken zu einem Ganzen sind, und darum auch etwas Ganzes herstellen und erklären können.

Wir dürfen uns nicht schmeicheln, dass die Erfahrungen statt unser die Last und die Wonne des Denkens übernehmen werden; wir müssen sie selbst auf uns nehmen, dass wir endlich zu der wirklichen Wahrheit gelangen können. Wer übernimmt denn die Erprobung der Axiome? Doch nur das Denken selber. Und wer zweifelt daran, dass z. B. das Axiom des Nicht-Widerspruchs eine wirkliche, substantielle Wahrheit sei, nachdem diess Axiom in einer ganzen wirklichen Wissenschaft erprobt worden ist? Wir erheben uns durch die Hypothesen, wie durch die Axiome, anfangs *über* die Erfahrung, aber nicht

unbewusst, sondern bewusst, wir kommen dann in demselben Bewusstsein wieder zur Erfahrung zurück, nachdem wir durch die Hypothesen befähigt worden sind, die Erfahrung wahrhaft zu erkennen und zu begreifen. Nur die *unbewusste* Erhebung über die Erfahrung weiss nicht, was sie thut, wenn sie dasjenige, was doch nur in der That anfangs Hypothese ist, für wahre Thatsache, transcendente Anschauung u. s. w. nimmt, was doch wohl im Ernste der Wissenschaft endlich für nichts anders, als für Selbsttäuschung erklärt werden wird.

Ich weiss es, dass die Hypothesen wie Feuer gefürchtet werden. Aber diejenigen verurtheilen sich selber, die sie fürchten, denn sie fürchten die Probe der Forschung nach Wahrheit. In den physikalischen Wissenschaften wird seit *Newton* der Wahrheit die Ehre gegeben; in ihnen wird offen von den Hypothesen gesprochen. In andern Wissenschaften findet sich nicht einmal das *Wort*, wohl aber das Bedürfniss nach der *Sache*, die durch das Wort Hypothese bezeichnet wird. So sind z. B. die naturhistorischen Wissenschaften lange genug bei der Classification und bei der blossen Ermittlung der Erfahrungen verweilt, sie sollen doch endlich einmal zur Erklärung der Erfahrung übergehen. Aber diesen Weg wollen sie nicht gehen, denn er führt durch die Hypothesen. Einen andern Weg giebt es nicht als diesen, er ist der Weg der Wahrheit. Und so werden ihn alle Wissenschaften gehen müssen.

Wir stehen nicht an, den Satz auszusprechen, dass es ein Vorzug jeder Wissenschaft sei, wenn sie sich ernstlich Mühe giebt, vorerst haltbare Hypothesen aufzustellen. Denn diess ist eine nothwendige Zwischenstufe zwischen Erfahrung und Lehre. Wird diese Zwischenstufe nicht betreten, so kann auch nicht der Gipfel der Lehre und Wahrheit erreicht werden. Jede Hypothese ist ein Versuch zur *Erklärung* der Erfahrung, der erste Uebergang zum bestimmten Denken, von einzelnen *Bruchstücken* zum *Ganzen*. Was diesen vorausgeht, ist die rohe, ungeprüfte Erfahrung, die allgemeine Aufnahme eines wissenschaftlichen

Gebietes in ziemlich allgemeinen Redensarten. Diese kann im Verlaufe einer Wissenschaft sehr gut geordnet und vorbereitet werden; dann tritt ein Stillstand ein, wenn nicht der neue Schritt zur Erklärung der Erfahrungen begonnen wird. Aber nun denken sie: „Jetzt kommen die Hypothesen; diese müssen verbannt werden; wir wollen lieber stehen bleiben, und unsre Erkenntnisse aufs Neue überschlagen.“ Wir glauben auch, dass die Hypothesen verbannt werden müssen, aber erst nachdem sie überwunden sind, nachdem sie wirkliche Wahrheiten geworden sind. Dann wird der Name, aber nicht die Sache verbannt werden. Erst müssen wir aber zur Lehre und Wahrheit reif geworden sein. — Wer könnte daran noch zweifeln, nachdem die Gravitations-Lehre und die Optik, und andere physikalische Wissenschaften mit so glänzendem und überraschendem Erfolge vorausgegangen sind? Das Billigste ist, dass die Erfahrungswissenschaften zuerst darüber in's Reine kommen, warum die Hypothesen verbannt werden sollen. Dann werden sie auch erkennen, welche Hypothesen diess treffe, und welche nicht, und wie die Hypothesen beschaffen sein sollen, damit sie als Fortschritt-einleitende Stufen in jeder Wissenschaft angenommen und erprobt werden können.

Werden alle Erfahrungswissenschaften nach den drei Gebieten der Vernunft-Wissenschaften geordnet und eingetheilt, (was kein so sehr schwieriges Geschäft ist), so wird allerdings die ganze Vernunft sowohl nach den allgemeinen und besondern Vernunft-Wissenschaften, als auch nach den Erfahrungswissenschaften erkannt und ermessen werden. Es ist Alles gefunden worden, was in der Vernunft ist, nur nicht dasjenige, was im Wissen ursprünglich beabsichtigt war, nämlich *Gott*. Man wird sich darüber keine Täuschung machen können. Auf dem Wege der Vernunft wird Gott nicht erkannt werden. Und wenn dieser Weg der einzige Weg der Erkenntniss ist, so wird Gott weder gefunden, noch erkannt werden können. — Die Lehre von Gott kann weder eine allgemeine, noch eine besondere Vernunft-

Wissenschaft, noch auch eine Erfahrungs-Wissenschaft sein. Die Vernunft wird in ihrem ganzen Gebiete immer nur sich selbst und nichts anderes finden, nämlich die Gesetze, nach denen sie eingerichtet ist, und nach denen sie verfährt, um Wahrheit und Erkenntniss zu beweisen, sowohl in den Vernunft-Wissenschaften, als auch in den Erfahrungs-Wissenschaften. Nun kann Gott unmöglich ein Vernunftgesetz, ein blosses Mittel unserer Erkenntniss sein, und ein Gott, der in dieser Richtung gefunden würde, (was aber immer einen subjectiven Irrthum des Suchenden voraussetzte,) könnte gar nicht als Gott anerkannt werden. Denn Gott muss mehr sein, als ein blosses Gesetz, als eine blosser Einrichtung unserer Vernunft und unserer Erkenntniss.

Die Lehre von Gott kann keine besondere Vernunft-Wissenschaft sein, denn diese umfassen nur die besondern Gesetze, in denen sich unsere Vernunft zum Verständnisse der einzelnen Erfahrungs-Gebiete concentrirt. Die Lehre von Gott kann auch keine einzelne Erfahrungs-Wissenschaft sein, denn diese umfassen nur einzelne Theile der Erfahrung und der Welt. Gott aber kann nicht ein blosser Theil der Welt sein.

Auch können wir mit Gott nicht so verfahren wie mit der Welt. Er entzieht sich unserm Belieben. Mit der Welt verfahren wir in unserm Denken, als wenn wir ihr Herr und Meister wären, und wir müssen mit ihr so verfahren, wenn wir im Denken erstarken und unserer Aufgabe gewachsen werden wollen, obgleich sie in unserer Wissenschaft nicht als die wirkliche Welt, nicht als ein substantieller Theil unserer selbst, sondern als ein (im besonderen Gebiete) *Abgeschiedenes* und *Wesendes* enthalten ist.

Und doch sollte die Vernunft Zeugniss geben können von Gott. Sie giebt auch Zeugniss von ihm, aber keine Erkenntniss. Sie muss bekennen, dass sich Gott nicht einmal dem Begriffe nach zu etwas Abgeschiedenem und Wesendem machen lasse. Aber sie soll auch ein positives Zeugniss von Gott geben. Wie gelangt sie zu Ihm? Da Gott in sich der Welt gegenüber ein

ganzer Gott sein muss, wie das Vernunft-Gebiet der Welt gegenüber ein ganzes geschiedenes Gebiet unseres Geistes ist, so kann Gott nur *vor* und *ausser* der Welt sein, wie das Vernunft-Gebiet *nach* und *ausser* der Welt ist. — Steht aber die Lehre von Gott der Lehre der Vernunft als ein Ganzes gegenüber, so wird jede einzelne Erkenntniss ein Zeugniss von Gott ablegen können und wollen. Diess ist auch in allen Zeiten der Fall gewesen. Die Vernunft hat sich oft an die kleinste Erkenntniss gehalten, um zur Lehre von Gott zu kommen. Sie kommt aber nur zu einem Zeugnisse von ihm. Allerdings wird diess besser und treffender sein können, wenn die ganze Wissenschaft als solche, die Vernunft, die sich in allen ihren Gebieten ermessen und begriffen hat, diess Zeugniss geben wird. Erkenntniss wird es aber nimmermehr sein können.

Hier haben sich die Wissenschaften auf vielfache Art versucht. Sie haben z. B., mit dem Sein, als mit dem *Anfänglichen* begonnen. Sie haben aber nur immer wieder das Sein als *Abstractes* gefunden. Denn was man wahrhaft voraussetzt das wird man auch wahrhaft am Ende wieder finden. Diess hat jede wahre Wissenschaft eingesehen und erfahren. — Man könnte auch versuchen, wenn nicht mit dem Sein, doch mit Gott selbst, als Schöpfer der Welt zu beginnen. Versuchen kann man es wohl; aber was wird der wissenschaftliche Erfolg davon sein können? Man wird nichts Anderes zur Voraussetzung haben, als die gemeine Erfahrung, und gerade diese soll nicht vorausgesetzt, sondern erst durch die Vernunft-Wissenschaften erprobt und rectificirt werden. — Man wird also nicht anders verfahren können, als dass man den subjectiven Weg, den Weg der Vernunft-Wissenschaften einschlage. Nur muss man sich hüten, Gott in der fortschreitenden Ordnung dieser Wissenschaften suchen zu wollen, und das zu bewundern, was man selbst gebildet habe.

Man findet durch die Vernunft-Wissenschaften die Welt als ein nach Plan und Weisheit geordnetes Universum. Die Vernunft-

Wissenschaften befähigen dazu, diesen Plan und diese Weisheit wahrzunehmen. Insbesondere wird die Einsicht gewonnen, dass das Universum in drei wesentlich und substantiell verschiedenen Theilen bestehe, die nach den drei wesentlich und axiomatisch verschiedenen Vernunft-Wissenschaften geordnet, und miteinander in Einheit zu einem Ganzen verbunden sind. Diess fordert uns auf, den Schöpfer der Welt zu suchen und erkennen zu lernen. Denn ein blosses Sein kann es nicht sein, da jedes Sein wesentlich Eines ist, und die Welt als substantiell dreifach erkannt worden ist nach den Gebieten der drei besondern Vernunft-Wissenschaften. Dafür bürgen nicht einzelne, zerstreute und ungeprüfte Erfahrungen, sondern drei ganze Wissenschaften, die alle andere Wissenschaften umschlingen. Sie sind eine andere Bürgschaft und Erfahrung, als eine erste, zufällige Abstraction, die durch kein Resultat erprobt ist, wie doch diese Wissenschaften erprobt sind.

Betrachten wir die bestimmten Vernunft - Wissenschaften, so hat in ihnen das Denken gleichsam ein besonderes Gebiet *projicirt*. Das Denken trennt diese Welt des Gedachten von dem Urquell des Lebens an sich, und schafft eine eigene Welt der Erkenntniss, die, so hart auch das Wort scheinen möge, keine lebendige und wirkliches Leben athmende Welt, sondern eine wissenschaftlich getragene, wenn auch köstliche Geisterwelt ist. Diess Vernunft-Gebiet kann mit verschiedenen Namen genannt werden, es ist das Gedachte, Abgeschiedene, Wesende, das „*τὸ τὴν εἶναι*“, wenn Aristoteles unter diesem Ausdrucke dasselbe verstanden hat.

Will man nun Gott in diesem Reiche der Vernunft suchen, so übersieht man gänzlich, dass gerade die Vernunft-Wissenschaften auf's deutlichste zeigen, dass es Nichts gebe, das in nothwendigen und wesentlichen Banden mit dem zusammenhänge, was vor seinem Ursprunge ist. Denn gäbe es solche wesentliche Bande, so müssten sie in der Vernunft offenbar werden. Diese weist aber nur auf sich selber hin, und nicht auf irgend

etwas, das dem Sein selbst vorausginge. Wer diess läugnen, bestreiten oder widerlegen wollte, der würde Alles, was über Axiome, Beweise und Methode der Vernunft - Wissenschaften erörtert und bewiesen worden ist, angreifen und widerlegen müssen. Wählt er nicht diesen Weg des Angriffs, so wird sein Unternehmen, der wirklichen ernstesten Wissenschaft gegenüber, nimmermehr gelingen können. Alles Seiende hat nur ein *Nicht-es* vor sich; es knüpfen sich keine nothwendigen Bande mit dem, was vor ihm war. Diess ist das Resultat der wirklichen Vernunft - Wissenschaften. Will man dieses *Nicht-es* selbst zum Ursprunge von Allem machen, so wird diess nothwendig zum philosophischen *Orgasmus* führen; es muss Taumel erwecken, weil es im Kreise geht.

Die Besonnenheit soll aber in jeder Wissenschaft erhalten werden. Diejenigen verfahren daher weit besonnener, die sich um dieses *Nicht-es*, was das Eine von dem Andern, die Vernunft-Erkenntniss der Welt von der Erkenntniss ihres Schöpfers abschneidet, (da zwischen ihnen keine nothwendigen Bande der Vernunft sind, keine Wurzeln, mit denen die Welt in ihrem Schöpfer aus eigenem Rechte wurzeln könnte,) — die sich um dieses *Nicht-es* nicht bekümmern, und die das Unerklärte und Unerklärbare an den Anfang ihres Wissens stellen, ganz sorgenlos darüber, wie sich die Vernunft zurechtfinden werde, was denn doch auch eine unläugbare Thatsache der Wissenschaft ist.

Diess wird uns aber doch zu der höheren Besonnenheit führen können, dass wir uns fragen werden, ob denn der Weg der Vernunft der *einzige* und der *ganze* Weg der Erkenntniss sei, was bei allen Wirren ganz ununtersucht und unbewusst vorausgesetzt wird. Nun ist auf's Leichteste einzusehen, dass die Vernunft zwar mit Recht die Ausschliesslichkeit auf ihrem Gebiete behaupte, dass diess Gebiet aber selbst nur das *halbe* Gebiet der Wissenschaft sein könne. Denn der Weg der Vernunft ist der Weg zu dem Wesen, zu dem, was zu Grunde liegt, zu dem Abgeschiedenen. Dieser Weg muss aber durch

den Weg zu demjenigen, was begründet und was Leben giebt, nothwendig ergänzt werden. Der Weg der Vernunft führt zu dem *Unpersönlichen*; die Vernunft macht ihrer Natur nach Alles zu einem bloss Wesenhaften. Diesem gegenüber giebt es einen andern Weg der Erkenntniss, den Weg durch *Persönlichkeit*, was unter allem Gewissen das Erste und Gewisseste ist, da alle Wissenschaft geschichtlich ist, alle Lehre und Mittheilung durch Persönlichkeit stattfindet, und erst im eigenen Forschen zum Wesenhaften gemacht wird. Die Vernunft hat Recht, wenn sie in ihrem eigenen Wege von dem Geschichtlichen und Persönlichen absieht, so wie man Recht hat, wenn man in der Lehre von der Gravitation z. B. von der Lehre vom Lichte absieht; denn je reiner und ungetrübter jedes Einzelne durchgeführt wird, desto wesenhafter wird es erkannt werden. Wird aber auch z. B. die Wissenschaft der Physik Recht haben, wenn sie über der Lehre von der Gravitation die Lehre vom Lichte übersehen will? Eben so wenig wird die ganze Wissenschaft Recht haben, wenn sie über der Vernunft die Persönlichkeit übersehen will.

Dieses sind die zwei sich ergänzenden Wege der Erkenntniss, der Weg der Vernunft und der Weg der Persönlichkeit, der zugleich der Weg der Geschichte ist. Die Einen haben wenig Sinn für den einen, die andern haben wenig Sinn für den andern Weg. Ja es finden hier oft solche Uebertreibungen statt, dass das Wachen in dem einen Wege ein Träumen in dem andern ist, und umgekehrt. Der Mensch soll sich aber seiner ganzen Bestimmung bewusst werden. Es hat Jahrhunderte gegeben, welche den zweiten Weg allein geachtet und den ersten verachtet haben, und es hat Jahrhunderte gegeben, die den ersten Weg geachtet und den zweiten verachtet haben. Dieses wird sich fortsetzen, bis endlich der rechte Zustand der Erkenntniss eintritt, bis alle Vorurtheile und Illusionen aufgedeckt sein werden. — Dass aber der Weg durch Geschichte und Persönlichkeit zu Gott führen werde, ist schon daraus ein-

leuchtend, dass niemals eine Lehre von Gott herrschend wurde, die nicht von Persönlichkeit ausgegangen war. Diess weiter auszuführen und zu erläutern, ist keine Aufgabe der Vernunft-Wissenschaften. —

Ueerblicken wir nun den Gang unserer Untersuchungen, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass eine ernstlich gemeinte Wissenschafts-Lehre eingeführt, und dass zur weiteren Forschung, zur angestregten Thätigkeit des Denkens fortgegangen werden soll. Es sind mehr Probleme gegeben, als aufgelöst worden. Aber Alle, die in irgend einer Wissenschaft Erfahrungen gemacht haben, werden einsehen, dass diess näher zutrefte, als wenn man mit einer Lehre auftreten wollte, die die Auflösung aller Schwierigkeiten, die Verkündung aller Wahrheiten, und den unfehlbaren Eintritt des goldenen Zeitalters der Wissenschaft an der Stirne trüge. Von diesem Ziele sind wir noch weit entfernt. Die Wissenschaft wird nur allmählig bereichert und vollendet werden können.

Doch wird Einiges für die substantziellen Wahrheiten und für die Anordnung aller Wissenschaften erreicht worden sein. Es sind auch einige subjective Lehren gewonnen worden, die das Denken bilden und fördern können. — Wenn in einer Wissenschaft lange Zeit hindurch ein Weg gegangen worden ist, auf dem nichts Erhebliches gefunden wurde, so wird Jedem erlaubt sein, an der Richtigkeit dieses Weges zu zweifeln, und einen anderen Weg, etwa den umgekehrten des früheren, zu versuchen. Diess kann unvermuthet zu neuen Aufschlüssen führen. Nicht selten werden im Verlaufe ganzer Systeme Rückschritte gemacht und für Fortschritte gehalten. Da wird es gut sein, wenn man einmal den Rückschritt des Rückschritts, d. h. den Fortschritt versuchen wird.

Descartes sagt, dass es Leute gebe, die, wenn sie einmal über das Gewöhnliche hinausgehen, und zu zweifeln anfangen, niemals wieder in das rechte Geleis kommen, und von einer Uebertreibung in eine andere fallen, und für ihr ganzes Leben

verdorben sind. Diesen wolle er seine Methode, anfangs an aller Wahrheit zu zweifeln, nicht empfehlen. An diesen wird aber nicht viel zu verderben sein. Sie verwechseln das Subjective mit dem Objectiven, was ausserordentlich gewöhnlich ist, sowohl im Wissen wie im Nicht-Wissen. Wer an der substantiellen Wahrheit zweifelt, der glaubt unstreitig, dass er weiser sei, als die Wahrheit selber. Er täuscht sich. Denn an der Wahrheit zweifeln, ist nicht mehr und nicht weniger, als unbewusst aussprechen, dass man bisher noch unfähig sei, die Wahrheit zu erkennen. An seinem Wissen darf Jeder zweifeln, und je mehr er zweifeln und sein Nicht-Wissen einsehen und zu verbessern suchen wird, desto leichter wird er zu einem sichern Anhaltspunkte seiner Erkenntniss kommen können.

Descartes spricht auch von Solchen, die von der Kunst Gebrauch machen, mehr zu wissen, als sie wirklich wissen. Wenn sie es bloss äusserlich thun, so ist es ihre eigene Last. Es wird nicht viel schaden können. Aber entschieden schädlich ist diese Kunst, wenn sie innerlich ist, und wenn sie in dem Kleide der Bescheidenheit einhergeht. Denn dann hindert sie die Fortschritte der Wissenschaft. So ist z. B. angenommen, dass es zwei Substitutionsformeln gebe, die das Differenzial:

$x^{m-1} d x (a + b x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational machen. Diess ist der Fall, wenn entweder $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}$, ganze Zahlen werden.

Von da aus heisst es: „ein wenig Ueberlegung zeigt die Unmöglichkeit, andere Substitutionsformeln, die dem angegebenen Zwecke entsprechen, aufzustellen.“ Diess ist aber etwas leicht über eine so wichtige Sache hinweggegangen. Denn von diesen Substitutionsformeln hängt es ab, wie viele irrationale Differenzialien auf rationale zurückgebracht werden können, und davon hängt es ab, wie viele Differenzialien durch *die bereits bekannten Urfunctionen* integrirt werden können. Davon hängt aber die ganze Uebersicht des Integral-Calculs ab. Denn fände sich z. B. noch eine dritte Substitutionsformel, so würde durch

die bekannten Urfunctionen der dritte Theil aller Differenzialien *mehr* integrirt werden können, es brauchten also auch weniger Urfunctionen berechnet zu werden, die zudem nicht einmal Urfunctionen wären, da sie auf andere zurückgebracht werden könnten.

Was ist nun bescheidener, zu sagen: dass man sich dieser wenigen Ueberlegung füge, nach der es nur zwei Substitutionsformeln geben soll, oder zu sagen, dass man nicht wisse, ob es diese zwei, oder mehrere Substitutionsformeln geben werde? Wer das Erstere ausspricht, der erklärt, dass er mehr wisse, als er wirklich weiss. Denn er weiss nicht, dass es nur diese zwei Substitutionsformeln gebe. Solchen Erklärungen gegenüber ist es bescheidener, zu sagen, dass man nicht wisse, ob es nur diese zwei oder aber mehrere Substitutionsformeln geben werde. Bescheiden ist es, wenn man den Beweis dieses Satzes unternimmt. Eines von beiden muss dann stattfinden. Entweder gelangt man zur Einsicht, dass es nur diese zwei Substitutionsformeln geben könne, und nicht mehrere (und auch diess ist eine Erkenntniss und eine Förderung der Wissenschaft); oder man findet noch eine dritte Substitutionsformel, und erkennt zugleich, dass es nicht mehr brauchbare Formeln als diese drei geben könne. Und diess wird auch Erkenntniss und Förderung der Wissenschaft sein.

Sichere Anzeigen über die Punkte, wo man in einer Wissenschaft tiefer graben müsse, findet man ferner in den gangbaren Erklärungen ihrer Lehren. Wo von einiger Ueberlegung gesprochen wird, oder wo die Erklärungen aussehen, wie Bitten und Entschuldigungen, dass man die Sache so und nicht anders betrachte, wo die Lehren aussehen, wie Zank und Schmähung auf diejenigen, die sich mit der „durchaus klaren Wahrheit“ nicht begnügen wollen: da darf man sicher sein, dass man einen wunden Fleck getroffen habe, der durch die angegebene Kunst nicht geheilt werden kann. Von da aus ist weiter zu forschen, wenn die Wissenschaft gefördert werden soll.

So sind z. B. alle Erklärungen über die unendlich kleinen

Grössen des Differenzial-Calculs, nichts anderes als Entschuldigungen; man bittet gleichsam um Verzeihung, dass man sich einer solchen Sache unterwinde. Hier ist es Bescheidenheit, dass man sich nicht selber nachgebe, und dass man nicht ablasse, zu forschen, bis man entweder die volle Einsicht gewonnen habe, dass die unendlich kleinen Grössen allen Aufgaben des Differenzial-Calculs genügen, oder aber bis man diese unendlich kleinen Grössen durch endliche, bestimmte und erkannte Grössen ersetzt, wodurch man eine so leichte, schöne, einfache Erkenntniss gewinnt, dass man nicht begreifen kann, wie sie so lange verborgen bleiben konnte.

Es wird in jeder Wissenschaft noch viele solcher Punkte geben. So verhält es sich in der Mathematik noch mit dem ganzen Variations-Calcul. In diesem gewinnt man, wenn man nach gegebenen Regeln verfährt, unstreitig grosse und sichere Wahrheiten. Aber über die Gründe, warum die angegebenen Regeln wahr und richtig seien, drückt man die Augen zu, oder zankt über Diejenigen, die sich mit den materiellen Resultaten nicht begnügen wollen. Man braucht ja diese Resultate nicht wegzuwerfen. Man hat sie unverdient und unerkannt; diess schliesst aber die Nothwendigkeit nicht aus, dass man sie ernstlich verdienen und erkennen soll.

Man wird niemals irgend einer Schwierigkeit ausweichen dürfen. Man muss offen und treu gegen sich selbst sein, man muss sich unumwunden gestehen, was man wisse und nicht wisse. Es ist nicht genug, dass man etwas halb wisse; man muss es ganz wissen, und nur dadurch, dass man sich zum Bewusstsein bringt, was man nicht wisse, gewinnt man die Anhaltspunkte für die fernere Forschung.

Wenn man zum Beweise eines Satzes einen andern Satz nimmt, und endlich zu einem ersten Satze gelangt, so muss man diess ausdrücklich erklären. Man darf sich nicht selbst glauben machen wollen, dass etwas darum wahr sei, weil man es in einer langen Reihe von Schlüssen und Beweisen gefunden hat. Es wird Alles noch von dem ersten Satze abhängen. Kann

man ihn nicht beweisen, so muss man ihn unbedenklich als einen unbewiesenen Satz hervorheben. Diese Herausstellungen der unbewiesenen Sätze sind so gut, wie die besten Erklärungen der Wissenschaft, sie sind die Fingerzeige für die fernern Forschungen. Warum sollte man sich und Andere blenden wollen?

Endlich muss man die Gesetze der Methode auf's Vollkommenste befolgen und sie zur zweiten Natur zu machen suchen. Zuerst die Gesetze über die Definitionen, dass man durch sie nicht Lehrsätze einführe, deren Beweise man geschenkt oder nachgelassen haben will; dann die Gesetze über die Axiome und Beweise. Hauptsache ist aber immer, dass man einsehe, was in einer Wissenschaft Noth thue, dass man wisse, was die endliche Erkenntniss sein werde, auf die alles Uerkannte zurückgebracht werden soll. Wenn man in einer Wissenschaft nicht weiss, was man will, so weiss man Nichts auf die rechte Art, und alle Erkenntnisse werden mehr eine Last als eine Erleichterung, mehr eine Trauer als eine Freude des Geistes sein. Hat man aber eine Wissenschaft auf die rechte Art, so kann in ihr Nichts so verborgen sein, das nicht entdeckt, und als eine sichere, leichte, freie Erkenntniss errungen und bewahrt werden könnte.

Es wäre noch Mehreres auszuführen. Ich denke aber mit *Descartes* zu schliessen, dass es besser sei, Vieles nicht zu sagen, damit Andere das Vergnügen haben, es selber zu finden. Dann werden sie vielleicht mit dem, was gesagt und was nicht gesagt worden ist, um so zufriedener sein; sie werden sich bemühen, das Fehlende durch eigene Forschung zu ersetzen und die Wissenschaft zu bereichern.

Mayr, Aloys,

Untersuchungen über die wissenschaftliche Methode mit besonderer Anwendung
auf die Mathematik

Würzburg 1845

Enc. 154 h

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10401428-7